MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

FIZICĂ

manual pentru clasa a IX-a

Octavian Rusu

Mihaela Chiriță





NICULESCU

MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI CERCETĂRII

Octavian Rusu

Mihaela Chiriță

FIZICĂ

manual pentru clasa a IX-a



NICULESCU

ACEST MANUAL A FOST FOLOSIT DE:						
Anul	Numele elevului care a primit manualul	Clasa	Școala	Anul școlar	Starea manualului*	
					la primire	la returnare
1.	....					
2.	....					
3.	....					
4.	....					

* Starea manualului se va înscrie folosind termenii: nou, bun, îngrijit, nesatisfăcător, deteriorat.

- Profesorii vor controla dacă numele elevului este scris corect.
- Elevii nu trebuie să facă nici un fel de însemnări pe manual.

Referenți științifici:

Prof. univ. dr. **Dan Alexandru Iordache**
Conf. dr. **Viorel Păun**
Prof. gr. I **Alexandru Petrescu**

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
RUSU, OCTAVIAN
Fizică: manual pentru clasa a IX-a / Octavian Rusu, Mihaela Chiriță. - București: Editura Niculescu, 2004
Bibliogr.
ISBN 973-568-874-3

I. Chiriță, Mihaela

[illegible]75.35)

Adresa: B-dul Regiei 6D
[illegible]04 – București, România
T[illegible] (+40)21-312.97.82
(+40)21-312.97.84
Tel/Fax: (+40)21-312.97.83
Call center: (+40)21-314.88.55
E-mail: club@niculescu.ro
Internet: www.niculescu.ro

Tipărit la **SEMNE**

ISBN 973-568-874-3

PREFAȚĂ

Manualul este optim structurat pentru nivelul elevilor din clasa a IX-a, are nivel relativ scăzut de dificultate, respectă integral și uniform conținuturile cerute de programa de fizică 2004, realizând o foarte bună corelare a conținuturilor și sarcinilor de învățare la toate capitolele.

Conținuturile, prezentate accesibil, cu o creștere progresivă a dificultății, se adresează elevilor de nivel mediu. Definițiile și explicațiile sunt clare (în detaliu pentru curioși), demonstrațiile sunt corecte, modelările grafice și fotografiile fac trimiteri la fenomenele analizate sau amintite în text, suficiente ca număr și bine echilibrate cu textul. Acesta este redactat într-un stil atrăgător, accesibil categoriei de vârstă, titlurile și subtitlurile sunt evidente, capitolele și paginile numerotate vizibil, ideile principale clar marcate. Fiecare temă începe cu o recapitulare sau cu o inventariere a informațiilor care stârnesc interesul și motivează învățarea. În tratarea temei se obține echilibrul optim între accesibilitate, rigurozitate științifică și prezentarea informațiilor de actualitate privind descoperirile fizicii și aplicațiile lor tehnico-științifice.

Conținuturile care nu sunt obligatorii pentru toate profilurile sunt notate cu asterisc: conținuturile suplimentare* (curriculum-ul diferențiat pe profiluri) și conținuturile facultative* (a căror parcurgere este decisă de profesor în funcție de nivelul și nevoile elevilor, în cadrul orelor alocate în curriculum-ul la decizia școlii). Lecturile* și extinderile* opționale (pentru curioși și performeri) se referă la personalități din istoria fizicii sau la noutăți științifice. Elevul devine participant în procesul învățării interactive cu acest manual, deoarece manualul îi stimulează bunul simț științific, imaginația, inventivitatea, contribuie la cultivarea valorilor și formarea atitudinilor pozitive cerute de programă. Concepția didactică este modernă, aliniată standardelor reformei învățământului. Sunt folosite metode didactice atractive și eficiente (scheme și modelări grafice pe calculator, analogii, demonstrații teoretice sau experimentale simple, dar intuitive și revenire asupra noțiunilor dificile). Definițiile, noțiunile noi și simbolurile mărimilor fizice sunt scrise cu alte caractere, pentru a rămâne în memoria vizuală, în sprijinul elevilor cu ritmuri proprii de învățare mai scăzute.

Din rapoartele de evaluare ale referenților științifici reiese că manualul conține posibilități multiple de evaluare, probleme clasice interesante, teste grilă. Conținutul este bine structurat și sintetizat. Abordarea fenomenelor fizice prin exemple sugestive, destul de cunoscute de elevi, dezvoltă gândirea critică și creativitatea tehnică. Aplicațiile, exemplele concludente și tipurile de probleme rezolvate sunt bine alese și suficiente. La sfârșitul fiecărui capitol există un număr satisfăcător de întrebări, probleme, teste de autoevaluare diferite (fixare, recapitulare) cu dificultate gradată. Acestea stimulează activitatea individuală. Problemele propuse au grad mediu de dificultate. Ordinea temelor poate fi schimbată la dorința profesorului.

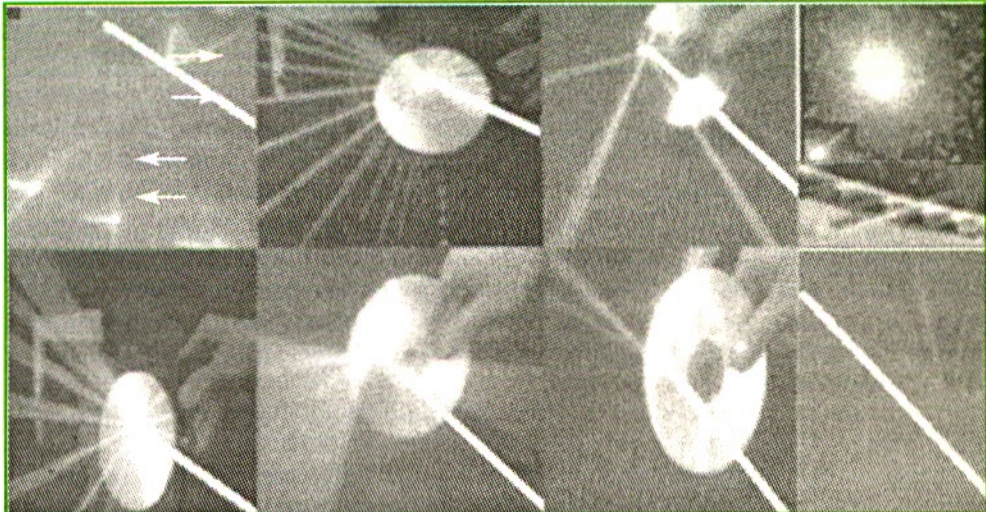
Experiența, bibliografia folosită și colaborarea autorilor cu profesorii universitari de la Facultatea de Fizică-Universitatea București și departamentul de fizică al Universității Politehnica din București sunt evidente în respectarea conținutului științific și a terminologiei corecte. Colaborarea autorilor la lecțiile interactive de fizică ,,Intuitext" facilitează evidențierea fenomenelor prin analiza unor experimente simulate pe calculator. Utilizarea acestui manual va avea o contribuție importantă la îmbunătățirea pregătirii elevilor de liceu la disciplina Fizică.

Experimentele propuse stimulează activitatea individuală. Cele descrise sunt opționale dacă laboratorul școlar nu are dotarea corespunzătoare sau nu este timp pentru realizarea lor. Experimentele realizate în laborator dezvoltă învățarea prin cooperare.

Considerăm că s-a realizat un echilibru optim între: accesibilitate, analiză corectă cu limbaj științific adecvat, rigurozitate științifică, exemple concludente și informarea elevilor privind descoperirile din fizică și aplicațiile lor tehnico-științifice. Echilibrul realizat între exigențele didactice se situează la un nivel foarte bun. A fost utilizată o gamă largă de instrumente de interacțiune cu elevii prin segmentele: observații, lecturi pentru curioși, noutăți pentru curioși, experiment, aplicații, tabele, scheme, probleme rezolvate, probleme propuse cu răspunsuri multiple, teste de recunoaștere a afirmațiilor adevărate și false, mărimi și unități, teste de autoevaluare.

Vă dorim succes cu acest manual !

Referenții științifici și autorii



CAPITOLUL 1

OPTICĂ GEOMETRICĂ

„Un atom nu se pierde în natură. O stea s-a stins și lumina ei – ca efect al existenței ei – călătorește mii de ani pentru a ajunge la ochiul nostru."

Mihai Eminescu – *Fragmentarium*

Radiațiile (undele) luminoase fac parte din familia undelor electromagnetice. Atomii unei substanțe pot emite (la tranzițiile electronilor de pe nivele energetice superioare pe nivele energetice inferioare ale atomilor) radiații electromagnetice de anumite frecvențe, ca și cum ar fi „oscilatori acordați" numai pe acele frecvențe.

Lungimea de undă λ reprezintă distanța parcursă de o undă cu viteza de propagare v în timp de o perioadă T, deci $\lambda = vT$. Prin lumină monocromatică vom înțelege radiații luminoase cu o anumită frecvență f și, respectiv, cu o anumită lungime de undă $\lambda = v/f$. Lungimile de undă λ, vitezele de propagare v și indicii de refracție n depind de mediul prin care se propagă radiațiile considerate.

Condițiile în care se produc reflexia și refracția

Optica studiază fenomene luminoase: propagarea luminii, reflexia, refracția și altele.

Optica geometrică se ocupă cu studiul propagării luminii prin diferite medii și cu studiul formării imaginilor prin sisteme optice, fără să țină cont de natura luminii. Descrierea unui fenomen optic, observat în natură sau provocat în laborator, se face cu ipoteze simplificatoare, pe modele.

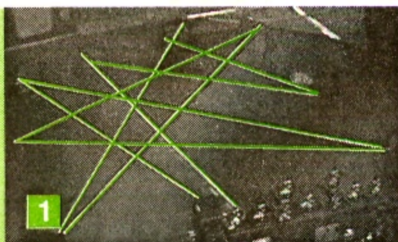
Noțiuni utilizate

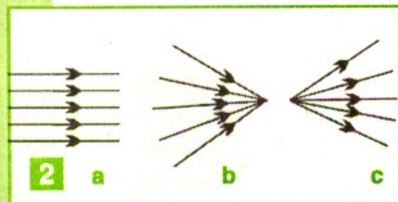
1. **O sursă de lumină** este considerată punctiformă dacă dimensiunile ei sunt mici în comparație cu distanțele la care se observă efectele luminoase.

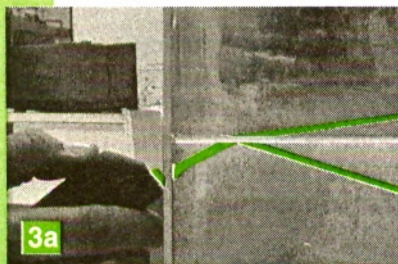
2. **Razele de lumină** reprezintă direcțiile de-a lungul cărora se propagă energia luminoasă, de la o sursă luminoasă (considerată punctiformă) până la un punct al receptorului. 1

3. **Un fascicul de lumină** este un fascicul de raze de lumină, cu secțiunea neglijabilă în raport cu dimensiunile sistemului de corpuri prin care se propagă; fasciculul poate fi paralel 2a, convergent 2b sau divergent. 2c

Studiul opticii geometrice se bazează pe câteva principii.


1


2 a b c


3a

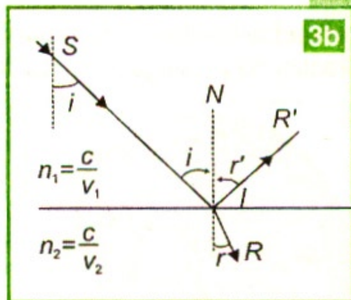
1. Principiul propagării rectilinii a luminii: *O rază de lumină se propagă rectiliniu în medii transparente, izotrope și omogene.* Direcția și mărimea vitezei de propagare a luminii nu se schimbă dacă nu se schimbă proprietățile mediului. Dacă privim o șosea asfaltată într-o zi fierbinte de vară, aceasta pare că oscilează, deoarece straturile de aer nu mai constituie un mediu izotrop, iar razele de lumină nu se mai propagă rectiliniu.

2. Principiul reversibilității drumului parcurs de razele de lumină: *O rază de lumină se poate propaga în ambele sensuri.*

3. Principiul independenței razelor de lumină: *Efectul produs de o rază de lumină care face parte dintr-un fascicul este independent de prezența celorlalte raze din fascicul.*

Dacă o rază de lumină întâlnește suprafața de separare dintre două medii optice transparente, se observă că o rază se întoarce în mediul din care a provenit, fenomen numit *reflexie*, în timp ce cea de-a doua rază pătrunde în mediul al doilea, fenomen numit *refracție*. 3a

Reflexia luminii este fenomenul optic care constă în schimbarea direcției de propagare a unui fascicul paralel de lumină, atunci când întâlnește suprafața netedă (lucioasă) care separă două medii diferite, fasciculul întorcându-se în mediul din care provine.



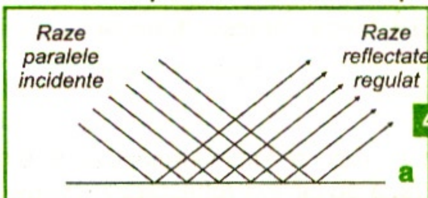
3b Ea respectă următoarele legi:

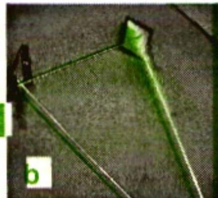
- raza incidentă *SI*, raza reflectată *IR'*, normala *IN* pe suprafața de separare a celor două medii, construită în punctul de incidență *I*, sunt coplanare;
- unghiul de incidență, *i*, format de raza incidentă *SI* cu normala *IN*, este egal cu unghiul de reflexie, *r'*, format de raza reflectată *IR'* cu normala *IN* ($i = r'$).

La incidență normală, raza reflectată și raza incidentă se confundă cu normala ($i = r' = 0$).

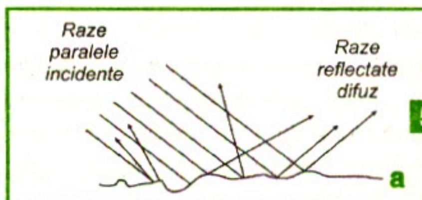
Legile reflexiei se verifică experimental cu fascicule de lumină paralele foarte înguste, îndreptate spre suprafața liberă a unui lichid aflat în repaus sau spre suprafața de separare dintre aer și un semicilindru transparent din sticlă sau plexiglas.

Radiațiile vizibile (percepute de ochiul uman) emise de diverse surse de lumină (Soare, stele, lămpi cu filamente incandescente, tuburi cu descărcări în gaze, arcuri electrice, diode laser etc.) ajung pe suprafețele corpurilor, unde se refractă și se reflectă (regulat sau difuz). *Reflexia regulată* (într-o singură direcție) a razelor paralele de lumină nu ne permite să vedem suprafețele netede (lucioase); putem vedea detalii de pe ele numai în direcția razelor de lumină reflectate, dacă lumina este suportabilă pentru ochi și nu produce senzația de durere. 4 a, b *Reflexia difuză* (în mai multe direcții) a razelor paralele de lumină ne permite să vedem suprafețele cu neregularități. 5 a, b





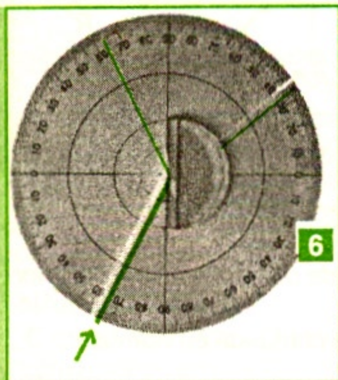
Suprafața mată este acea suprafață care difuzează lumina în toate direcțiile. Noi vedem obiectele opace dintr-o cameră prin fenomenul de reflexie: obiectele nefiind perfect lucioase reflectă difuz lumina, astfel că razele provenite de la punctele obiect pot ajunge la ochiul nostru.





Fotografia 4 b redă, ceea ce nu trebuie niciodată observat cu ochiul liber, reflexia unui fascicul laser pe o oglindă, iar fotografia 5 b reflexia fasciculului laser pe un compact disc (CD). Avantajul fotografierii fasciculului laser este observarea reflexiei regulate și a reflexiei difuze fără pericolul expunerii ochiului.

Refracția luminii este fenomenul optic care constă, în general, în schimbarea direcției de propagare a unui fascicul paralel de lumină, când întâlnește suprafața de separare dintre două medii transparente diferite, fasciculul propagându-se în cel de-al doilea mediu. 6



Legile refracției sunt:

- raza incidentă *SI*, raza refractată *IR* și normala *IN* pe suprafața de separare a celor două medii, în punctul de incidență *I*, sunt coplanare;
- raportul dintre sinusul unghiului de incidență (format de raza incidentă *SI*, cu normala *IN*) și sinusul unghiului de refracție (format de raza refractată *IR*, cu normala *IN*) este egal cu raportul vitezelor de propagare a luminii în mediul 1 și, respectiv, în mediul 2:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Definim *indicele de refracție absolut*, n, al unui mediu transparent prin raportul dintre viteza luminii, c, în vid și viteza luminii, v, în acel mediu:

$$n = \frac{c}{v}.$$

Indicele de refracție relativ al celui de-al doilea mediu, în care ajunge lumina, față de primul mediu, din care provine lumina, notat cu n_{21}, măsoară raportul vitezelor de propagare a luminii în mediile transparente 1 și, respectiv, 2:

$$n_{21} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$$

Obținem, după înlocuiri, legea refracției (formularea Snell-Descartes):

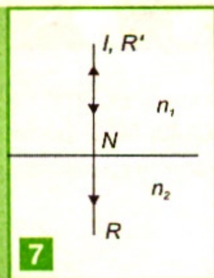
$$n_1 \sin i = n_2 \sin r.$$

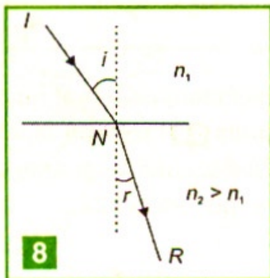
Cazuri particulare

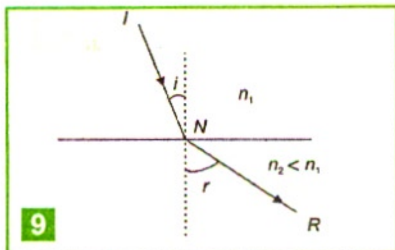
a) La incidență normală, raza de lumină reflectată pe o suprafață plană se întoarce pe același drum, iar raza de lumină refractată în cel de-al doilea mediu (dacă este transparent) nu este deviată. 7

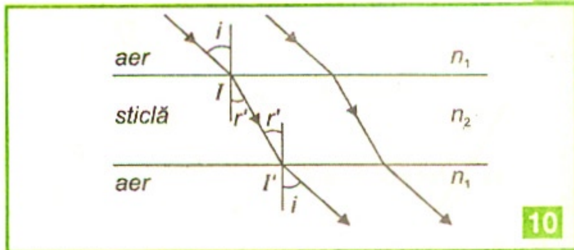
b) Dacă raza de lumină trece dintr-un mediu optic cu indice de refracție n_1, într-un mediu optic mai refringent, cu indice de refracție $n_2 > n_1$, atunci $i > r$, adică raza de lumină se apropie de normala pe suprafața de separare dintre cele două medii, 8

c) Dacă raza de lumină trece dintr-un mediu optic cu indice de refracție n_1, într-un mediu optic mai puțin refringent cu indice de refracție $n_2 < n_1$, atunci $i < r$, adică raza de lumină se depărtează de normala pe suprafața de separare dintre cele două medii. 9









Exemple practice

1. La trecerea luminii din aer în apă sau în sticlă, raza de lumină refractată se apropie de normală ($r < i$), iar la trecerea din apă sau din sticlă în aer, raza de lumină refractată se depărtează de normală.

2. Razele de lumină care ajung pe o lamă transparentă cu fețe plan-paralele, sub un unghi de incidență diferit de zero, ies din lamă paralel cu razele incidente, dar deplasate. 10

3. Dacă suntem într-o cameră și privim prin geam un obiect situat în exterior, razele de lumină se reflectă pe obiect, se refractă prin cele două suprafețe ale sticlei geamului și ajung la ochiul observatorului.

Un caz particular al comportării luminii la suprafața de separare dintre două medii îl constituie reflexia totală.

Condițiile în care se produce reflexia totală*

Dacă lumina trece dintr-un mediu mai refringent (cu indicele de refracție mai mare) într-un mediu mai puțin refringent, unghiul de refracție crește mai repede decât unghiul de incidență. 11a Când unghiul de refracție devine $r = 90°$, unghiul de incidență atinge valoarea limită $i = l$ și se obține fenomenul de **reflexie totală:** 11a, b

$$n_1 \sin l = n_2 \sin 90°;$$

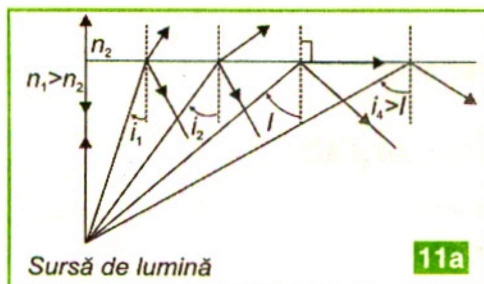
$$\sin l = \frac{n_2}{n_1}.$$

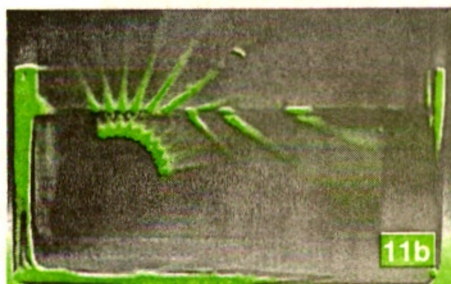
Dacă scriem legea refracției la unghiul limită pentru refracția apă-aer:

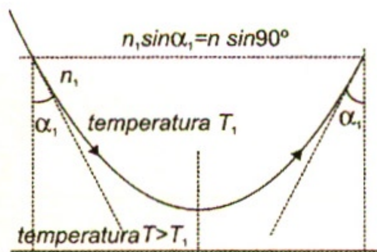
$$n_{apă} \sin l_{apă} = n_{aer} \sin 90°,$$

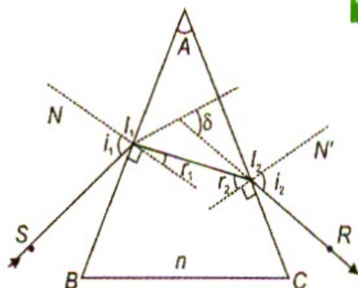
obținem $l_{apă} = 49°$ ($n_{apă} = 1,33$).

În cazul propagării luminii din sticlă în aer: $l_{sticlă} \approx 42°$, pentru $n_{sticlă} = 1,50$.









Exemple practice

1. În zilele toride, razele de lumină care se propagă către asfaltul șoselelor puternic încălzit traversează straturi cu indici de refracție din ce în ce mai mici, unghiul de incidență crește până la valoarea limită *l*, când se produce reflexia totală, **12** și asfaltul pare ud. Acest miraj optic se îndepărtează pe măsură ce te apropii de el, sau dispare și reapare, deoarece straturile de aer cu indici de refracție diferiți își schimbă poziția relativă față de observator.

2. În deșert este cunoscut fenomenul numit „fata morgana". O rază de lumină care pornește de la un obiect se reflectă total pe straturile de aer și se curbează. Ochiul observatorului vede imaginea unui obiect în prelungirea razelor, deci pentru el obiectul pare a se oglindi pe suprafața unei ape.

Propagarea luminii prin prisma optică

Prisma optică este un mediu transparent limitat de mediul exterior prin două suprafețe plane care formează între ele unghiul prismei, *A*, și se intersectează pe muchia ei. **13**
Secțiunea prin prismă obținută cu un plan perpendicular pe muchia acestuia se numește secțiune principală. Fie *ABC* secțiunea principală a unei prisme care are fețele *AB* și *AC*. Considerăm că pe fața *AB* cade o rază incidentă sub unghiul i_1 în punctul I_1 și, pătrunzând într-un mediu mai dens optic, se apropie de normală. Fie r_1 unghiul de refracție la fața *AB*. Raza de lumină cade pe fața *AC* în punctul I_2 sub unghiul de incidență r_2. Raza de lumină iese în aer depărtându-se de normală sub unghiul i_2.
Observăm că raza de lumină se propagă spre baza prismei.

Lecturi pentru curioşi*

1. Metodă de calcul a indicelui de refracție

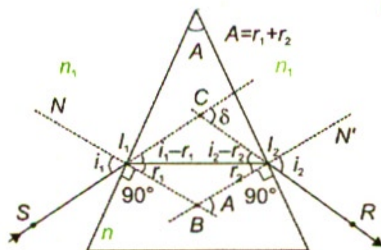
Analizează figura **14**.
Putem scrie legile refracției la cele două fețe, *AB* și *AC*:

$$\sin i_1 = n \sin r_1$$
$$n \sin r_2 = \sin i_2$$

Se poate arăta (geometric) că $A = r_1 + r_2$.
Deviația razei de lumină (unghiul dintre raza care intră în prismă și raza care iese) este:

$$\delta = i_1 + i_2 - A.$$

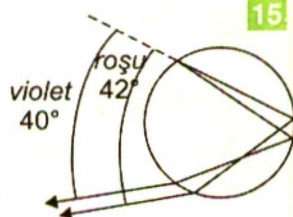
Dacă raza de lumină se propagă simetric prin prismă, adică $i_1 = i_2 = i$ și $r_1 = r_2 = A/2$, se obține deviația minimă, δ_{min}.
Cunoscând unghiul prismei, A, și măsurând unghiul de deviație minimă se poate determina indicele de refracție al materialului din care este confecționată prisma:

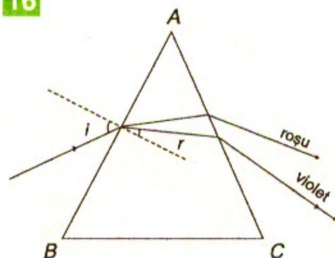


$$n = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin\left(\frac{\delta_{min} + A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}}.$$

2. Dispersia luminii

Prisma optică descompune lumina albă emisă de o sursă în radiațiile componente, care sunt deviate diferit spre baza prismei. Descompunerea unui fascicul de lumină albă în radiațiile monocromatice componente, la trecerea printr-o prismă optică, apare datorită dependenței vitezei v de propagare a undelor luminoase, deci și a indicelui de refracție al mediului, de lungimea de undă a radiațiilor. Dispersia luminii constă în variația indicelui de refracție al unui mediu transparent ($n = c/v$) în funcție de culoarea luminii refractate (adică de lungimea de undă a radiațiilor luminoase).
În vid, viteza de propagare a undelor electromagnetice are valoarea $c = 299\ 792\ 458$ m/s, aproximativ egală cu viteza de propagare a luminii în aer. În practică se consideră că lumina se propagă cu viteza aproximativă $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s.
Fenomenul de dispersie a luminii se observă în cazul obiectelor din cristal care descompun lumina în culorile spectrale.
Fenomenul de dispersie se observă și în natură. Iată câteva exemple.
În micile picături de apă aflate, după ploaie, în suspensie în aer, razele care vin de la Soarele aflat în spatele observatorului suferă două refracții și o reflexie, descompunându-se în culorile curcubeului. 15
Ai sesizat picături mici de rouă „colorate"?
În majoritatea mediilor optice dispersia este *normală:* indicele de refracție scade lent cu creșterea lungimii de undă, deci indicele de refracție absolut, n, are valori mai mari pentru radiațiile violete decât pentru cele roșii.
În cazul în care un fascicul de lumină albă care cade pe o prismă optică de sticlă, la refracția la prima față sunt valabile relațiile $\sin i = n_r \sin r_r = n_v \sin r_v$,





unde n_r și n_v reprezintă indicii de refracție absoluți ai culorilor roșu și, respectiv violet, iar r_r și r_v reprezintă unghiurile de refracție pentru cele două culori.

Dacă sticla prezintă o dispersie normală, $n_r < n_v$ rezultă $r_r > r_v$ deci razele roșii vor fi refractate diferit prin prismă față de cele violete, astfel că lumina va fi descompusă de prismă în culori spectrale de la roșu la violet 16.

Aplicarea legilor reflexiei și refracției

1. Imagini în oglinzi

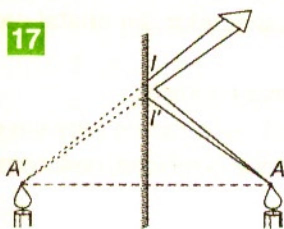
Oglinzile plane și oglinzile sferice (convexe și concave) sunt întâlnite la instrumentele și dispozitivele optice. Oglinzile reflectă aproape integral lumina care ajunge pe suprafața lor lucioasă, plană sau sferică. Suprafețele lucioase produc reflexie regulată deoarece neregularitățile au adâncimi mici. Razele de lumină se reflectă pe oglinzile plane, ca și pe cele sferice, respectând legile reflexiei.

Imaginea unui punct într-o oglindă se obține la intersecția prelungirilor a două raze reflectate. 17 Imaginea unui obiect într-o oglindă plană este virtuală, simetrică față de obiect în raport cu oglinda, și orientată în sens invers.

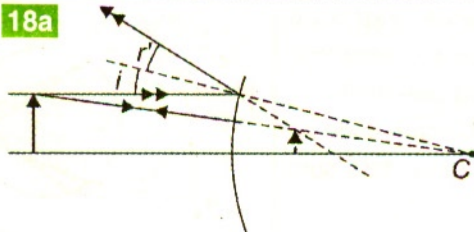
Oglinzile convexe 18 a se folosesc la autovehicule ca oglinzi retrovizoare.

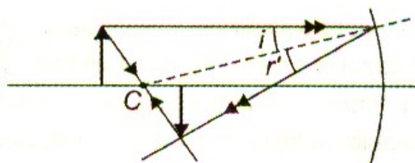
Șoferul auto observă autovehiculele care vin din spate sau obiectele pe care le-a depășit. Oglinzile convexe formează imagini virtuale și mai mici decât obiectul.

Tot oglinzi convexe se montează și pe marginea șoselelor, în curbele periculoase, pentru a permite conducătorului auto să vadă autovehiculele care vin din sens opus.

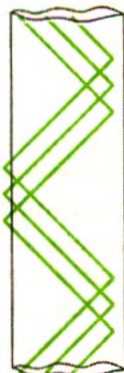


Oglinzile concave 18 b se folosesc la microscoapele optice, pentru a concentra razele de lumină și a ilumina astfel mai bine preparatul!





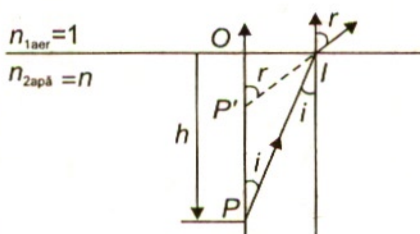
2. Transmisia luminii prin fibre optice



Prin fibrele de sticlă, numite fibre optice, lumina se propagă prin reflexii totale multiple. 19 Astfel, fibrele optice transmit informațiile sub formă de semnale luminoase. În telefonie și în medicină sunt folosite fibre optice constituite dintr-un miez de sticlă acoperit cu o manta, cu diametrul total de 100-300 μm. Indicele de refracție al miezului este cu 1-2% mai mare decât cel din manta, pentru ghidarea luminii prin reflexii interne totale. Sistemele de transmisiuni prin fibre optice oferă numeroase avantaje față de cablurile convenționale din cupru: flexibilitate, dimensiuni mai mici, pierderi mici de energie. Aplicațiile necesită conectoare, transmițătoare cu laser și receptoare de înaltă sensibilitate.

3. Cum se vede un obiect în apă?

Un observator privește aproape de direcția normalei care trece printr-un punct obiect *P* aflat în apă (de exemplu, o monedă), la adâncimea *h*. 20 El vede obiectul într-un punct P' aflat la o adâncime aparentă $OP' = OI \text{ ctg} r$, unde $OI = h \text{ tg} i$. Imaginea virtuală a obiectului se formează la întâlnirea prelungirilor a două raze de lumină. Din legea refracției, $n \sin i = \sin r$, obținem, la incidență aproape normală:



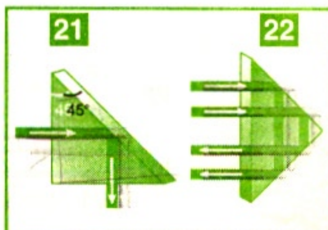
$$i = r \approx 0;\ \text{tg} i \approx \sin i;\ \text{tg} r \approx \sin r \text{ și:}$$

$$OP' = \frac{h \text{tg} i}{\text{tg} r} = \frac{h \sin i}{\sin r} = h/n \text{ și } PP' = h(1-1/n)$$

Imaginea finală este virtuală și se formează mai aproape de suprafața apei. De exemplu, dacă o monedă se află pe fundul unui bazin, umplut cu apă, la adâncimea de 50 cm, observatorul care privește perpendicular pe suprafața apei (având indicele de refracție 1,33) va vedea moneda mai aproape de suprafața apei, la 37,5 cm de aceasta și, deși va introduce mâna, nu va putea lua moneda, deoarece aceasta se află de fapt pe fundul bazinului și nu în locul unde o vede observatorul.

4. Prisma cu reflexie totală este folosită ca piesă reflectantă în locul oglinzilor metalice, care se zgârie ușor sau se oxidează, la periscoape, binocluri, aparate de fotografiat cu vizare prin obiectiv.

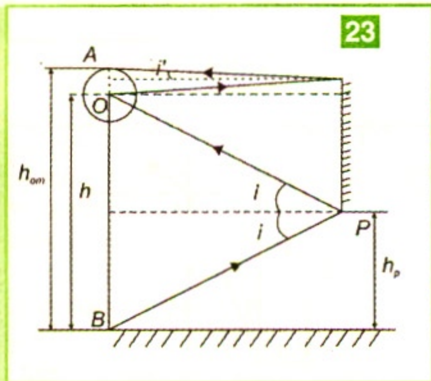
Fie o prismă din sticlă care are secțiunea principală un triunghi dreptunghic isoscel. Deoarece unghiul limită pentru sticla optică este $l \approx 42°$, o rază de lumină incidentă normal pe o catetă suferă o singură reflexie totală, pe ipotenuză 21, iar o rază de lumină indicentă normal pe ipotenuza prismei suferă două reflexii totale, pe cele două catete 22, deoarece unghiul de incidență este de 45° și este mai mare decât unghiul limită.



În concluzie, la suprafața de separare dintre două medii optice transparente, o rază de lumină suferă atât fenomenul de reflexie cât și cel de refracție dar, la unghiuri de incidență mai mari decât unghiul limită, numai reflexia totală este sesizabilă.

Probleme rezolvate

1. Un observator cu înălțimea h_{om} = 1,8 m, având ochiul la h = 1,7 m deasupra podelei unei camere, se privește într-o oglindă plană dreptunghiulară așezată pe unul dintre pereții camerei. Care trebuie să fie înălțimea minimă a oglinzii și la ce înălțime trebuie așezată față de podea marginea ei inferioară, pentru ca observatorul să se poată vedea în întregime în oglindă ?



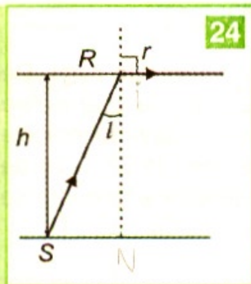
Rezolvare

Pentru a se putea vedea în întregime în oglindă, omul trebuie să-și vadă creștetul capului, punctul A, și picioarele, punctul B. 23 Razele de lumină care provin de la punctele A și, respectiv B, trebuie să ajungă după reflexia pe oglindă la ochiul omului. Conform legilor reflexiilor suferite de cele două raze pe oglinda plană, geometric se observă că:

$$h_{oglindă} = \frac{h_{om}}{2} = 0{,}9 \text{ m}.$$

Marginea inferioară a oglinzii trebuie așezată față de podea în punctul P, astfel că

$$h_P = \frac{h}{2} = 0{,}85 \text{ m}.$$



2. O sursă de lumină se află pe fundul unui acvariu umplut cu apă care are indicele de refracție n = 4/3. O rază de lumină suferă un fenomen de reflexie totală, iar raza cercului luminos de la suprafața apei cu centrul pe verticala sursei de lumină este R = 50 cm. Să se calculeze înălțimea stratului de apă din acvariu.

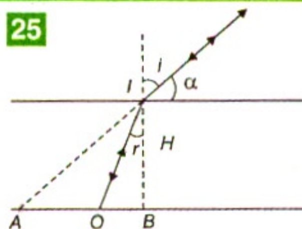
Rezolvare

Deoarece raza de lumină suferă un fenomen de reflexie totală când întâlnește suprafața apei 24 $r = 90°$ și

$$n\sin l = 1 \Rightarrow \sin l = \frac{1}{n};$$

$$\left.\begin{aligned} \text{tg}\, l &= \frac{R}{h} \rightarrow h = \frac{R}{\text{tg}\, l}.\\ \text{tg}\, l &= \frac{\sin l}{\sqrt{1-\sin^2 l}} = \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow h = R\sqrt{n^2-1} = 44{,}1 \text{ cm}.$$

3. Unde va atinge un băţ fundul acvariului în care înălţimea stratului de apă este $H = 40$ cm, dacă băţul este introdus de un elev sub un unghi de 30° faţă de suprafaţa apei, cu scopul de a atinge o pietricică ($n = 4/3$)?



Rezolvare

Când elevul vrea să lovească pietricica O de pe fundul acvariului cu un băţ 25, el introduce băţul sub unghiul sub care vede pietricica; constată apoi că băţul atinge fundul acvariului în alt punct, A, deoarece introduce băţul în direcţia razei de lumină pe care o vede el, neţinând cont că la refracţia în apă aceasta şi-a schimbat direcţia de propagare.

$$AO = AB - OB$$

$$AB = H\text{tg}i, \text{ iar } OB = H\text{tg}r$$

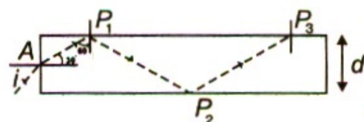
$$\Rightarrow AO = H(\text{tg}i - \text{tg}r)$$

$$\text{dar } \text{tg}r = \frac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}$$

$$\Rightarrow AO = H\left(\text{tg}i - \frac{\sin i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}\right).$$

În cazul nostru $i = 60°$, deci obţinem $AO = 35$ cm.

4. Pe suprafaţa plană a unei fibre optice de diametru $d = 2$ cm şi indice de refracţie $n = \sqrt{2}$, cade o rază de lumină sub un unghi de incidenţă $i = 45°$, care intră pe axa optică a fibrei. 26 Care este distanţa străbătută de-a lungul fibrei optice, până la a N-a reflexie pe suprafaţa cilindrului? Particularizaţi pentru $N = 10$ reflexii.



Rezolvare

Raza de lumină pătrunde în fibra de sticlă prin punctul A, astfel că $\sin i = n \sin r$, iar $r = 30°$.

Unghiul limită $l = 45°$, deoarece $\sin l = \frac{1}{n}$.

Prin urmare razele, care se reflectă în P_1, P_2, P_3, suferă reflexii totale, deoarece unghiul de incidenţă în aceste puncte este de 60°, mai mare decât unghiul limită.

La prima reflexie $AP_1 = \frac{d\sqrt{3}}{2}$.

La a doua reflexie distanța pe direcția fibrei este $2AP_1$, iar după N reflexii

$$D = AP_1 + 2(N-1)AP_1 = (2N-1)AP_1 = (2N-1)\frac{d\sqrt{3}}{2}.$$

Pentru $N = 10$ reflexii obținem $D = 32,9$ cm.

TESTE

Citește următoarele afirmații și răspunde (pe caiet) cu A dacă afirmația respectivă este adevărată sau cu F dacă este falsă:

1 A F. Un con îngust de raze care converg într-un punct se numește fascicul convergent de raze de lumină.

2 A F. Raportul sinusurilor unghiurilor de incidență și de refracție este egal cu raportul vitezelor luminii în mediul incident și, respectiv, emergent.

3 A F. Obiectele de pe fundul unui bazin de adâncime h plin cu apă, care are indicele de refracție n, se văd la distanța h/n de suprafața apei când sunt privite la incidență normală.

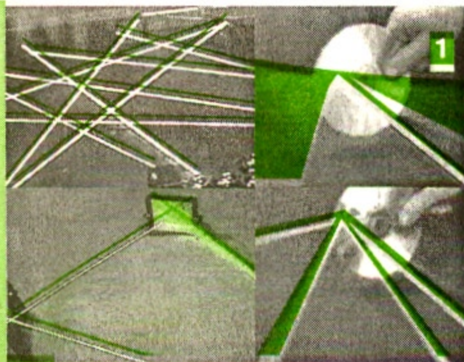
4 A F. La trecerea luminii dintr-un mediu mai refringent în altul mai puțin refringent, raza refractată se apropie de normală.

5 A F. Un mediu este mai refringent decât altul dacă viteza de propagare a luminii prin acesta este mai mică decât prin celălalt.

6 A F. Reflexia totală apare atunci când raza de lumină întâlnește un mediu în care viteza ei de propagare crește față de mediul incident.

7 A F. Apele limpezi sunt mai adânci decât par.

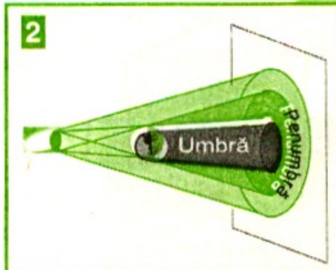
8 A F. Dacă într-o prismă de sticlă intră printr-o față un fascicul monocromatic de raze paralele, atunci razele emergente care ies prin altă față a prismei sunt paralele.



9 A F. Raza de lumină este modelul folosit pentru propagarea rectilinie a radiațiilor luminoase.

10 A F. Reflexia și refracția luminii se produc concomitent la suprafața care separă două medii cu proprietăți optice diferite.

11 A F. Unghiul limită *l* reprezintă valoarea maximă a unghiului de incidență pe suprafața de separație dintre două medii transparente optic pentru care se mai produce refracția luminii, dacă raza de lumină vine dintr-un mediu mai refrigent.



12 A F. Sursele de lumină punctiforme emit fascicule de lumină divergente, care pot fi considerate paralele la distanțe mari de acestea.

13 A F. Un fascicul paralel de lumină reprezintă un mănunchi de raze care se propagă paralel una față de alta.

14 A F. Un fascicul paralel de lumină se reflectă regulat (într-o singură direcție) pe o suprafață netedă și difuz (în mai multe direcții) pe o suprafață neregulată. 1

15 A F. Investigarea medicală (endoscopia) folosește fibre optice pentru iluminarea organelor interne și pentru transmiterea imaginii către ochi sau camera de înregistrare.

16 A F. Formarea umbrei și a penumbrei se explică folosind principiul propagării rectilinii a razelor de lumină. 2

Probleme

1. Culorile obiectelor umede par mai intense decât ale celor usdcate, deoarece, în cazul obiectelor umede, reflexia regulată este dominantă, iar în cazul obiectelor uscate este dominantă:
a) reflexia difuză; b) refracția; c) reflexia difuză și refracția; d) refracția și reflexia.

2. Când Soarele este la asfințit, umbra unei persoane este de 1 m, iar a unui băț vertical de 50 cm este 25 cm. Înălțimea persoanei este:
a) $h = 1{,}5$ m; b) $h = 1{,}75$ m;
c) $h = 2$ m; d) $h = 2{,}2$ m.

3. Un fascicul de lumină de lărgime $d_1 = 1$ cm ajunge, sub unghiul de incidență $i = 60°$, pe suprafața unei lame de sticlă cu $n = 1{,}5$. Lărgimea fasciculului în lamă devine:
a) $d_2 = 1$ cm; b) $d_2 = 1{,}63$ cm; c) $d_2 = 1{,}5$ cm; d) $d_2 = 1{,}73$ cm.

4. Dacă un fascicul filiform de lumină se propagă printr-un mediu cu $n = 1{,}73 = \sqrt{3}$ și ajunge la o suprafață sub unghiul de incidență $i = 30°$, atunci unghiul de refracție r în aer are valoarea:
a) 30°; b) 45°; c) 60°; d) 90°.

5. O rază de lumină monocromatică ajunge sub un unghi de incidență $i_1 = 60°$ pe o prismă cu unghiul $A = 60°$ și iese sub unghiul de emergență $i_2 = i_1$. Indicele de refracție al prismei este:
a) $n = 1{,}73$; b) $n = 1{,}62$; c) $n = 1{,}51$; d) $n = 1{,}42$.



6. O sursă luminoasă formează imagini în două oglinzi plane, 3 Dacă oglinzile sunt perpendiculare una pe cealaltă, în cele două oglinzi se formează:
a) două imagini; b) 3 imagini; c) 4 imagini; d) 6 imagini.

7. Dacă pe o oglindă plană cade o rază de lumină sub unghiul de incidență i, iar oglinda se rotește cu unghiul α, raza reflectată se rotește cu:
a) α; b) 2α; c) 3α; d) 4α.

8. Două oglinzi plane formează între ele un unghi $\alpha = 45°$. Unghiul dintre orice rază incidentă pe una dintre oglinzi și raza reflectată pe cealaltă oglindă plană este egal cu:
a) 30°; b) 60°; c) 90°; d) 180°.

9. Un obiect se află la 30 cm față de o oglindă plană. Dacă oglinda s-a depărtat cu 10 cm, atunci imaginea se formează față de oglindă la distanța:
a) 20 cm; b) 30 cm; c) 40 cm; d) 50 cm.

10. Este mai ușor de citit un text pe:
a) hârtie lucioasă; b) hârtie mată; c) hârtie neagră; d) cenușie.

11. Dacă un obiect se află în fața unei oglinzi plane și se rotește cu unghiul α, imaginea sa:
a) se rotește în același sens, cu α; b) se rotește în sens contrar, cu α; c) se rotește în același sens, cu 2α; d) se rotește în sens contrar, cu 2α.

12. Dacă tu vezi în oglindă ochiul unui coleg, atunci și el vede în oglindă ochiul tău, deoarece în acest caz este valabil principiul: a) propagării luminii în linie dreaptă; b) reversibilității razelor de lumină; c) independenței razelor de lumină.

13. Formarea imaginii răsturnate pe peretele opus unui mic orificiu dintr-o cameră întunecată este efectul:
a) propagării luminii în linie dreaptă; b) refracției luminii prin orificiu; c) reflexiei regulate a luminii pe acest perete; d) reflexiei difuze a luminii pe perete.

14. O rază de lumină formează un unghi de 45° cu suprafața superioară a unei lame cu fețe plan-paralele care are indicele de refracție $n = \sqrt{2}$. Unghiul format de raza refractată cu raza reflectată este:
a) 30°; b) 46°; c) 75°; d) 105°.

15. O rază de lumină ajunge sub un unghi de incidență $i = 60°$ pe suprafața unei lame de grosime $e = 2$ cm și indice de refracție $n = \sqrt{3}$, plasată în aer. Deplasarea transversală dintre razele incidentă și cea emergentă este:
a) 5,7 mm; b) 1,16 mm; c) 1,41 mm; d) 3,46 mm.

16. O prismă cu $A = 90°$ și $n_2 = \sqrt{2}$, este situată cu o față în aer cu $n_1 = 1$ și cu cealaltă într-un mediu cu $n_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Valoarea unghiul de incidență pe prima față a prismei, astfel încât raza să poată emerge din prismă este:
a) $i < 90°$; b) $45° < i < 60°$; c) $45° < i < 90°$; d) $30° < i < 90°$.

Construcția lentilelor și a asociațiilor de lentile

Lentilele sunt sisteme optice construite dintr-un mediu optic transparent, cu un indice de refracție absolut, delimitat de mediul exterior prin două suprafețe sferice cu centrele O_1 și O_2 de raze R_1, respectiv R_2. 1

O lentilă se caracterizează prin următoarele elemente:

– **axa optică principală** este dreapta care trece prin centrele O_1 și O_2;

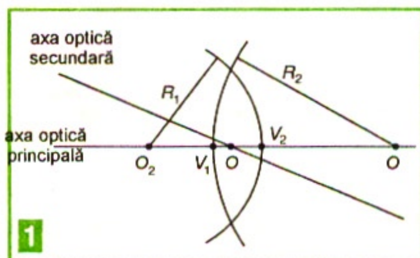
– **centrul optic** O este punctul în care practic coincid, pentru o lentilă subțire, punctele de intersecție, V_1 și V_2, ale suprafețelor sferice cu axa optică principală;

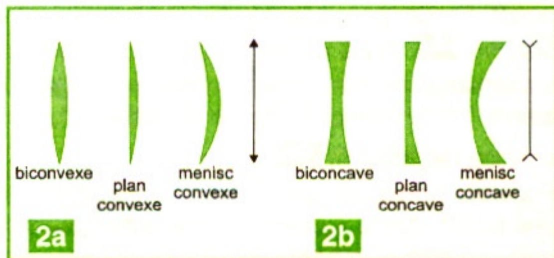
– **axa optică secundară** este orice dreaptă care trece numai prin centrul optic al lentilei subțiri.

Prin construcție, lentilele sunt:

• biconvexe, plan-convexe, menisc concav-convexe (mai subțiri la margini decât la mijloc) 2a;

• biconcave, plan concave, menisc convex-concave (mai groase la margini decât la mijloc) 2b.



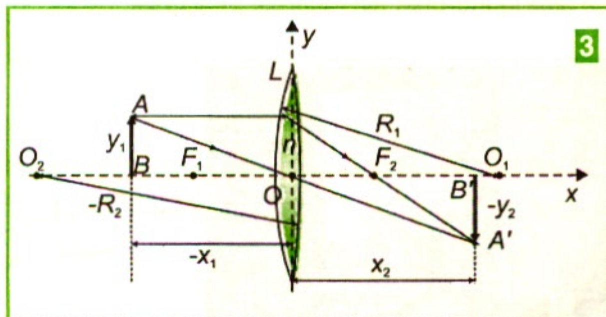


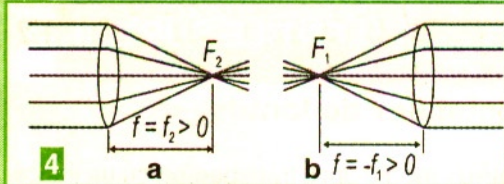
Lentilele subțiri au grosimile mici în comparație cu razele de curbură, R_1 și R_2, ale fețelor lentilei. Dacă una dintre suprafețe are raza de curbură infinită ($R = \infty$, $1/R = 0$), atunci suprafața respectivă este plană.

Orice rază luminoasă care trece prin lentilă se refractă prin fiecare suprafață. O rază luminoasă care se propagă de-a lungul unei axe optice nu-și modifică direcția la trecerea printr-o lentilă.

Convențiile de semne folosite în optica geometrică

• Fiecărei lentile îi asociem un sistem de coordonate xOy, cu axa orizontală Ox orientată în sensul propagării luminii, de-a lungul axei optice principale de la stânga la dreapta cu axa verticală Oy orientată în sus și cu originea în centrul optic al lentilei 3.





• Abscisa x_1 a unui punct obiect și abscisa x_2 a unui punct imagine sunt pozitive dacă sunt în dreapta originii sistemului de coordonate, și negative, dacă sunt în stânga ei. Când localizăm poziția unui punct din stânga originii sistemului de coordonate prin abscisă ($x_1 < 0$), atunci distanța dintre acel punct și axa verticală a sistemului de coordonate este $d = -x_1 > 0$.

• Ordonata y_1 a unui punct obiect și ordonata y_2 a unui punct imagine sunt pozitive dacă sunt deasupra axei Ox și negative dacă sunt sub aceasta. Ordonata unui punct de sub axa Ox este negativă ($y_2 < 0$), dar distanța acestuia față de axa Ox este pozitivă ($-y_2 > 0$).

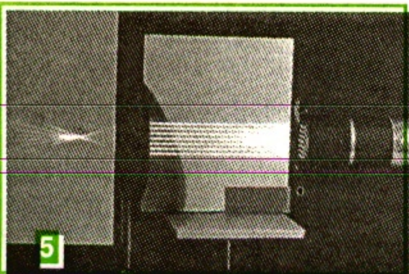
• Raza de curbură R a suprafeței de separare dintre două medii optice se măsoară de la suprafața considerată spre centrul de curbură și se consideră cu semnul plus în cazul în care centrul de curbură se află în dreapta suprafeței considerate și cu semnul minus dacă centrul de curbură se află în stânga ei.

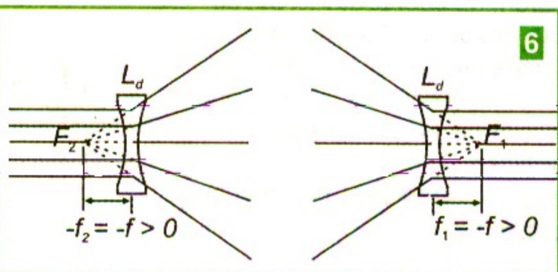
Normala în punctul de incidență este raza suprafeței sferice în acel punct.

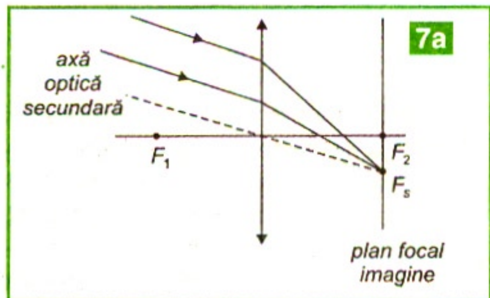
Razele de lumină care se propagă paralel cu axa optică principală în sensul considerat pozitiv se întâlnesc, după ce se refractă printr-o lentilă convergentă, într-un punct F_2 de pe această axă, numit **focar principal imagine**, cu abscisa f_2 pozitivă. 4a Dacă razele de lumină paralele cu axa optică principală ajung pe lentila convergentă din sensul considerat negativ, ele se întâlnesc, după refracția pe lentilă, într-un punct F_1 de pe această axă, punct numit **focar principal obiect**, cu abscisa negativă f_1. 4b

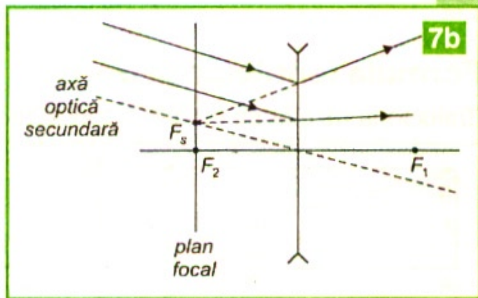
Focarele principale ale lentilelor convergente sunt **reale**, deoarece după refracția prin lentilă razele paralele cu axa optică principală formează un fascicul convergent care se strânge într-unul dintre focarele principale. Se poate determina experimental pe un banc optic focarul imagine al unei lentile convergente. 5 Dacă un fascicul de raze paralel cu axa optică principală se refractă printr-o lentilă divergentă, atunci prelungirile lor se întâlnesc într-un focar principal imagine F_2, din stânga lentilei, cu abscisa f_2 negativă. 6 Focarul principal obiect se află în dreapta lentilei divergente pe axa optică principală și are abscisa f_1 pozitivă.

Lentilele divergente au focarele principale **virtuale**, deoarece un fascicul paralel cu axa optică principală după refracția prin lentilă devine divergent, iar prelungirile razelor se strâng într-unul din focarele principale.









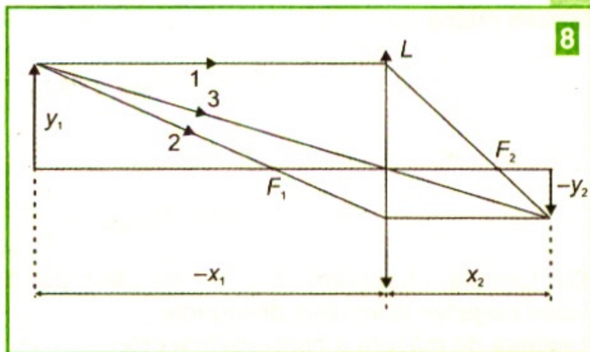
Distanța focală f a unei lentile este distanța focală imagine; astfel, o lentilă convergentă are distanța focală pozitivă, $f = f_2 > 0$, iar o lentilă divergentă are distanța focală negativă, $f = f_2 < 0$.

Focarul obiect, F_1, și focarul imagine, F_2, sunt situate la distanțe egale de centrul optic al lentilei subțiri, $f = f_2 = -f_1$, dacă lentila este mărginită de același mediu optic pe ambele fețe.

Planele care trec prin focarele principale și sunt perpendiculare pe axa optică principală a lentilei se numesc **plane focale**. Razele incidente dintr-un fascicul paralel puțin înclinat față de axa optică principală se vor strânge în focarul secundar F_S din planul focal. Poziția punctului F_S se găsește la intersecția axei optice secundare duse prin centrul optic al lentilei cu planul focal imagine. Axa optică secundară se construiește paralelă cu direcția fasciculului înclinat incident. În focarul secundar F_S se vor strânge razele de lumină, în cazul lentilelor convergente 7a, sau prelungirile acestora, în cazul lentilelor divergente 7b.

Construcția grafică a imaginilor în lentile

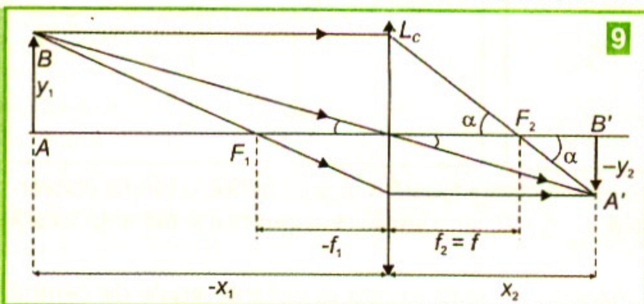
Pentru a construi imaginea unui punct al obiectului luminos se folosesc două dintre următoarele trei raze de lumină, 8 definite prin proprietățile lor:



- o rază paralelă cu axa optică principală se refractă prin lentilă astfel încât trece printr-un focar principal, dacă lentila este convergentă, sau prelungirea ei trece printr-un focar principal, dacă lentila este divergentă;
- o rază care trece prin centrul optic al lentilei iese nedeviată din lentilă;
- o rază care vine dintr-un focar principal al lentilei convergente sau spre un focar principal al lentilei divergente iese din lentilă paralel cu axa optică principală.

Formula lentilelor subțiri

Traiectoria razelor se modifică prin refracție la pătrunderea în lentilă și la ieșirea din aceasta. Imaginea unui obiect liniar, așezat perpendicular pe axa optică, este determinată de imaginile extremităților acestuia și de poziția obiectului față de lentilă. 9



Se pot scrie relațiile:

$$\frac{-y_2}{y_1} = \frac{x_2}{-x_1}; \quad \text{tg}\alpha = \frac{y_1}{f} = \frac{-y_2}{x_2 - f} \Rightarrow \frac{x_2 - f}{f} = \frac{-y_2}{y_1} \Rightarrow \frac{x_2}{-x_1} = \frac{x_2 - f}{f} \Rightarrow$$

$$x_2 f = -x_1(x_2 - f) \Rightarrow \frac{1}{x_1} = -\frac{1}{f} + \frac{1}{x_2}.$$

De aici se obține formula lentilelor subțiri:

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}.$$

Convergența lentilei , notată cu C, reprezintă inversul abscisei $f = f_2$ a focarului principal imagine F_2 al lentilei considerate:
Dacă ambele fețe sferice, de raze R_1 și R_2, sunt în contact cu același mediu, atunci folosim relația:

$$C = \frac{1}{f} = (n_{\text{relativ}} - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\text{unde } n_{\text{relativ}} = \frac{n_{\text{lentilă}}}{n_{\text{mediu}}}.$$

Din formulă, observăm că C și f au valori pozitive la lentilele convergente și au valori negative la lentilele divergente.
Unitatea de măsură a convergenței este**dioptria** , care corespunde distanței focale imagine de un metru:

$$[C]_{SI} = \text{m}^{-1} = \text{dioptrie} = 1\delta.$$

O lentilă care este convergentă într-un mediu în care indicele de refracție relativ al lentilei $n_{\text{relativ}} > 1$, poate deveni divergentă, dacă $n_{\text{relativ}} < 1$ când se află în alt mediu.
Mărirea liniară transversală a lentilei , notată cu β, se definește prin raportul dintre dimensiunea liniară transversală a imaginii și dimensiunea liniară transversală a obiectului:

$$\beta = \frac{y_2}{y_1} = \frac{x_2}{x_1},$$

unde y_2 și y_1 sunt dimensiunile liniare transversale ale imaginii și, respectiv, ale obiectului luminos pentru care se formează imaginea în lentila considerată. Valoarea negativă se asociază imaginii răsturnate, 9, iar valoarea pozitivă se asociază imaginii drepte.

Probleme rezolvate

1. O lentilă biconvexă simetrică din sticlă, având indicele de refracție $n = 1{,}5$, cu distanța focală $f = 30$ cm, formează imaginea unui obiect așezat la 45 cm de ea. Să se precizeze unde se formează imaginea, natura acesteia, mărirea liniară transversală. Să se calculeze convergența lentilei și raza acesteia.

Rezolvare

Din formula lentilelor subțiri obținem:

$$x_2 = \frac{fx_1}{f + x_1} = 90 \text{ cm} \quad \text{și} \quad \beta = \frac{x_2}{x_1} = -2$$

Deci imaginea este reală răsturnată, de două ori mai mare decât obiectul și se formează la 90 cm în dreapta lentilei.

$$C = \frac{1}{f} = 3{,}33\,\text{m}^{-1};$$

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{2(n-1)}{R} \Rightarrow R = 2(n-1)f = 30 \text{ cm}.$$

2. Așezăm un obiect în stânga unei lentile divergente cu distanța focală $f = -30$ cm, astfel încât imaginea acestuia este de 5 ori mai mică decât obiectul. Să se afle unde este situat obiectul față de lentilă?

Rezolvare

Deoarece lentila divergentă formează întotdeauna imagini virtuale pentru obiectele reale și drepte,

$$\beta = \frac{1}{5}. \text{ Cum } \beta = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow x_2 = \beta x_1.$$

Utilizând formula lentilelor subțiri: $\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f}$,

Se obține $x_1 = f\frac{(1-\beta)}{\beta} = -120$ cm.

3. O lentilă convergentă cu distanța focală $f = 30$ cm și $n = 1{,}5$ se introduce într-un mediu optic transparent cu $n' = 1{,}6$. Să se calculeze noua distanță focală a lentilei și să se interpreteze rezultatul.

Rezolvare

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$ când lentila se află în aer;

$$\frac{1}{f'}=\left(\frac{n}{n'}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$ când lentila este intodusă în noul mediu;

$$\frac{f'}{f}=\frac{n-1}{\frac{n}{n'}-1}$$

și $f'=\frac{f(n-1)n'}{n-n'}=-240$ cm.

Deoarece f' este negativă, înseamnă că se schimbă natura lentilei, aceasta devenind divergentă.

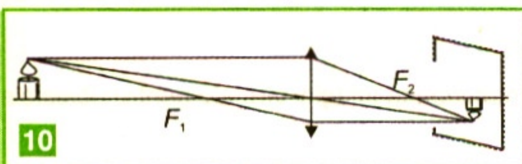
Analiza formării imaginii unui obiect liniar în lentilele convergente

Vom caracteriza imaginea în funcție de poziția obiectului față de lentilă.

Dacă obiectul se află la infinit, razele de lumină paralele formează o imagine punctiformă și situată în planul focal imagine al lentilei.

1. Considerăm obiectul situat dincolo de dublul distanței focale obiect. 10
Imaginea:

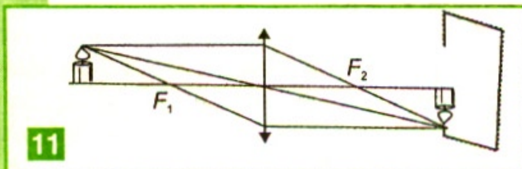
- se formează la distanțe cuprinse între distanța focală și dublul distanței focale imagine;
- este reală, răsturnată și mai mică decât obiectul.



10

2. Considerăm obiectul situat la dublul distanței focale obiect: 11
Imaginea:

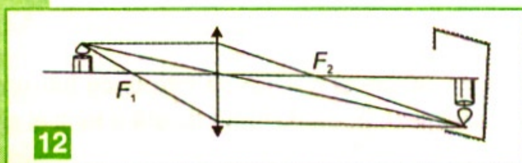
- se formează la dublul distanței focale imagine;
- este reală, răsturnată și egală cu obiectul.



11

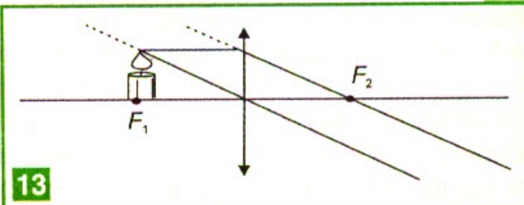
3. Considerăm obiectul situat între dublul distanței focale obiect și distanța focală obiect: 12
Imaginea:

- se formează dincolo de dublul distanței focale;
- este reală, răsturnată și mai mare decât obiectul.

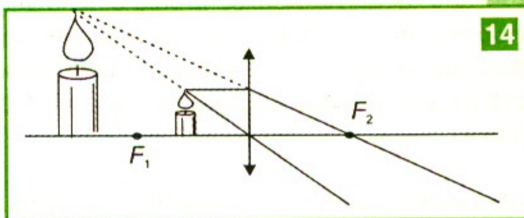


12

4. Considerăm obiectul situat în planul focal obiect. 13
Imaginile:
- se formează către infinit;
- una este reală, răsturnată și mult mai mare decât obiectul, iar cealaltă virtuală, dreaptă și mult mai mare decât obiectul.

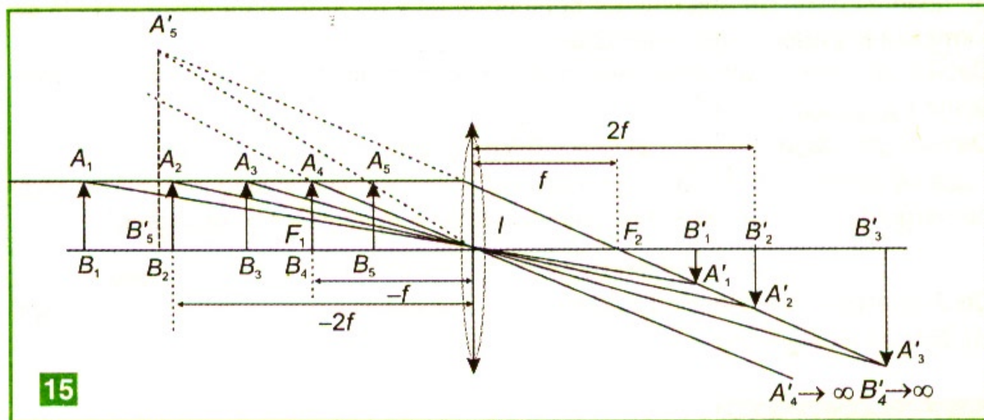


5. Considerăm obiectul situat între planul focal obiect și lentilă. 14
Imaginea:
- se formează de aceeași parte cu obiectul;
- este virtuală, dreaptă și mai mare decât obiectul.

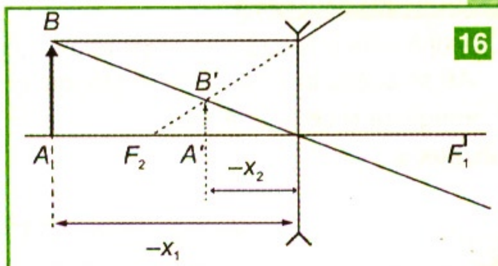


Sinteza situațiilor prezentate anterior este dată în figura 15

Lentilele divergente formează, pentru un obiect real, o imagine virtuală, dreaptă, de aceeași parte cu obiectul față de lentilă și mai mică, situată între planul focal imagine și lentilă. 16
Dacă toate razele de lumină care pleacă dintr-un punct luminos obiect sunt **paraxiale** (sunt foarte puțin înclinate, aproape paralele cu axa optică a sistemului și fac parte din fascicule de lumină înguste) se obține un punct imagine. Aceasta este



condiția de stigmatism, în **aproximația Gauss**. Imaginile sunt considerate astigmatice dacă unui punct obiect îi corespund mai multe puncte imagine foarte apropiate, astfel încât nu le mai putem distinge separat și se formează o pată imagine.



Imaginile formate prin lentile prezintă imperfecțiuni numite aberații (irizații marginale, deformări). Orice abatere de la stigmatism se numește **aberație optică**.

Aberația cromatică se produce datorită fenomenului de dispersie a luminii prin sticla lentilelor, imaginile apărând cu marginile colorate. Focarul razelor violete se formează mai aproape de lentila convergentă decât focarul razelor roșii.

Aberațiile cromatice se reduc prin alipirea lentilelor convergente și divergente.

Aberația de sfericitate se produce când imaginile sunt formate din fascicule paraxiale largi de lumină. Prin diafragmarea fasciculelor de lumină, această aberație este atenuată. Astigmatismul este aberația geometrică produsă de fasciculele înclinate față de axa optică principală, care provin de la surse punctiforme depărtate de axa optică.

Utilizarea lentilelor și asociațiilor de lentile subțiri

Lentilele se folosesc în construcția lupelor, ochelarilor și instrumentelor optice.

Lentilele de contact sunt lentile din materiale organice, care se lipesc direct pe cornee.

Lentilele de protecție se folosesc pentru absorbția radiațiilor ultraviolete sau infraroșii sau pentru a reduce radiațiile cu anumite frecvențe.

La instrumentele optice, imaginea unui obiect formată în prima lentilă, L_c, devine obiect pentru cea de a doua lentilă, L'_c, plasată pe aceeași axă optică, la distanța *d*.

Cea de-a doua lentilă formează imaginea finală a obiectului. Mărirea liniară transversală a imaginii finale se obține înmulțind măririle liniare transversale produse de fiecare lentilă, β_1 și, respectiv β_2, astfel încât $\beta_{sistem} = \beta_1\beta_2$.

Semnul pozitiv al măririi liniare transversale ne arată că imaginea finală se formează de aceeași parte cu obiectul, iar semnul negativ ne arată că imaginea finală se formează în partea opusă obiectului.

Dacă două lentile sunt alipite, sistemul optic este echivalent cu o lentilă cu convergența $C_{echivalentă} = C + C'$.

De exemplu, dacă $C = 2\ m^{-1}$ și $C' = -0{,}5\ m^{-1}$, atunci $C_{echivalentă} = 1{,}5\ m^{-1}$.

Dacă se alipesc mai multe lentile, sistemul echivalent este o singură lentilă a cărei convergență se calculează însumând convergențele lentilelor componente:

$$C_{sistem\ echivalent} = C_1 + C_2 + ... + C_n.$$

Dacă se alipesc două lentile *L* și *L'* cu $C' = -C$ se obține $C_{echivalent} = 0$, deci un sistem cu distanță focală infinită.

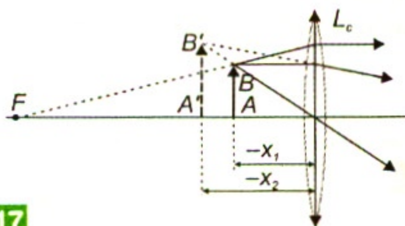
Probleme rezolvate

1. O lupă este o lentilă convergentă cu distanță focală mică; fie $f = 5$ cm. Un obiect *AB* se așază la $x_1 = -3$ cm în stânga lentilei. Să se precizeze unde se formează imaginea și ce natură are.

Rezolvare

$$x_2 = \frac{f x_1}{f + x_1} = -7{,}5 \text{ cm}; \quad \beta = \frac{x_2}{x_1} = 1{,}5.$$

Deci imaginea obținută este virtuală, dreaptă și mai mare decât obiectul de $\beta = x_1/x_2 = 1{,}5$ ori.



17

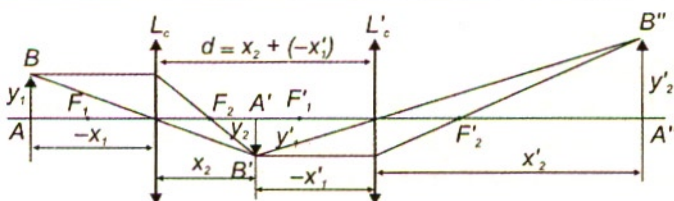
2. O lentilă convergentă ($f_1 = 20$ cm) și o altă lentilă convergentă ($f_2 = 10$ cm) sunt așezate coaxial la distanța $d = 50$ cm una față de alta. În stânga primei lentilei convergente, de aceasta la distanța $(-x_1) = 60$ cm de acesta se află un obiect cu înălțimea $y_1 = 5$ cm. Unde se formează imaginea finală? Ce natură și ce înălțime are imaginea?

Rezolvare:

Imaginea obiectului în prima lentilă se formează la distanța

$$x_2 = \frac{f_1 x_1}{f_1 + x_1} = 30 \text{ cm}$$

față de aceasta, în dreapta ei și este o imagine reală, răsturnată și mai mică decât obiectul AB, deoarece $\beta_1 = \frac{x_2}{x_1} = -0{,}5$. 18



18

Această imagine devine obiect pentru a doua lentilă, plasat la

$$x'_1 = x_2 - d = -20 \text{ cm}.$$

Deoarece $A'B'$ este situat în stânga celei de-a doua lentile convergente este obiect real pentru aceasta:

$$x'_2 = \frac{f_2 x'_1}{f_2 + x'_1} = 20 \text{ cm}; \quad \beta'_2 = \frac{x'_2}{x'_1} = -1;$$

$$\beta_{sistem} = \beta_1 \cdot \beta_2 = 0{,}5 \text{ și } y'_2 = 2{,}5 \text{ cm}.$$

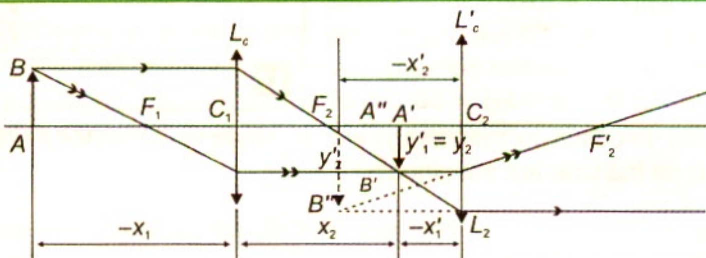
Sistemul de lentile formează pentru obiectul real AB o imagine reală, dreaptă, mai mică decât obiectul și situată în dreapta lentilei L'_C la 20 cm de aceasta.

3. În fața lentilei L_C, cu $f = 1$ m, se găsește în poziția $x_1 = -5$ m obiectul AB. Lentila L'_C se așază în dreapta lentilei L_C, la distanța $d = 2$ m de aceasta, astfel ca axele lor principale să coincidă.
Unde formează lentila L'_C imaginea finală dacă distanța ei focală este $f' = 2$ m?
Ce natură și ce înălțime are imaginea?

Rezolvare:

Imaginea se formează prin prima lentilă, față de C_1, în poziția

$$x_2 = \frac{fx_1}{f+x_1} = 1{,}25 \text{ m}, \quad \text{deci} \quad \beta = \frac{x_2}{x_1} = -0{,}25.$$



(imagine reală, răsturnată și mai mică decât obiectul). **19** Lentila L_C formează o imagine $A'B'$ reală a obiectului AB, care este situată în stânga lentilei L'_C și este obiect real pentru lentila L'_C.

$$d = x_2 - x'_1 \Rightarrow x'_1 = x_2 - d = -0{,}75 \text{ m};$$

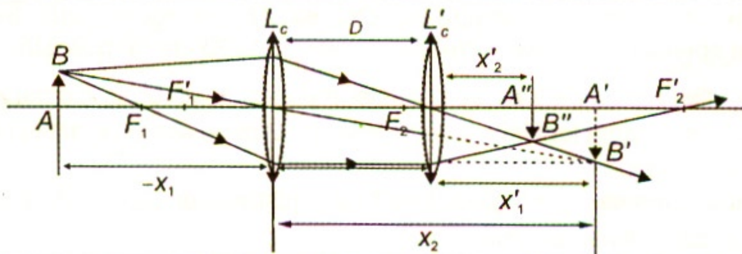
$$x'_2 = \frac{f'x'_1}{f'+x'_1} = -1{,}2 \text{ m, iar } \beta_2 = \frac{x'_2}{x'_1} = \frac{-1{,}2}{-0{,}75} = 1{,}6.;\ \beta_s = -0{,}4.$$

L'_C formează o imagine virtuală $A''B''$ = 8 cm.

4. Un obiect AB cu înălțimea y_1 = 5 cm se află în stânga unei lentile convergente cu distanța focală f_1 = 30 cm, la x_1 = – 40 cm. În dreapta lentilei convergente, coaxial cu aceasta, se așază o a doua lentilă convergentă cu f_2 = 60 cm, la D = 1 m de prima lentilă. Unde se formează imaginea finală, ce natură are și care este înălțimea ei?

Rezolvare

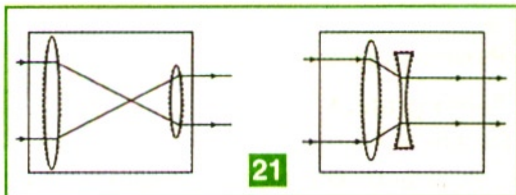
Lentila L_C formează pentru obiectul real AB o imagine $A'B'$ la distanța x_2 = 120 cm de aceasta în dreapta ei; imaginea care este reală și, deoarece $\beta_1 = -3$, este răsturnată și de trei ori mai mare ca obiectul **20**. Deoarece $A'B'$ se formează în dreapta lentilei L'_C la $x_1' = x_2 - D$ = 20 cm de aceasta, este obiect virtual pentru lentila L'_C. Astfel, lentila L_2 formează o imagine $A''B''$ la x_2' = 15 cm în dreapta lentilei, iar β_2 = 0,75. Sistemul format din cele două lentile formează în final o imagine reală $A''B''$, situată la 15 cm în dreapta lentilei L'_C; cum β_{sistem} = – 2,25, imaginea este răsturnată și are înălțimea – $A''B''$ = 11,25 cm.

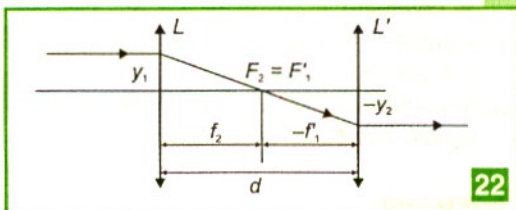


Sisteme optice afocale formate din două lentile*

Sistemele afocale (telescopice) sunt sisteme centrate, astfel încât un fascicul de raze paralel cu axa principală rămâne paralel cu aceasta după străbaterea sistemului. 21 În acest caz, focarul imagine F_2 al primei lentile coincide cu focarul obiect F'_1 al celei de a doua lentile. 22

Un sistem afocal poate fi format din:
- două lentile convergente;
- o lentilă convergentă și o lentilă divergentă, cu condiția ca distanța focală a lentilei convergente să fie mai mare decât modulul distanței focale a lentilei divergente.


21

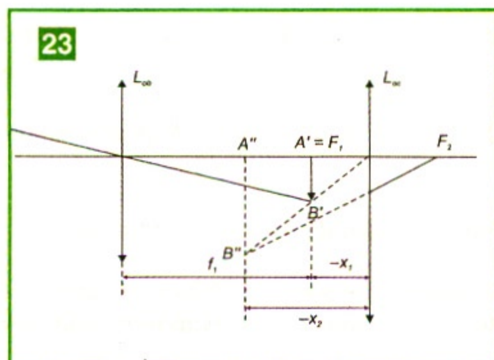


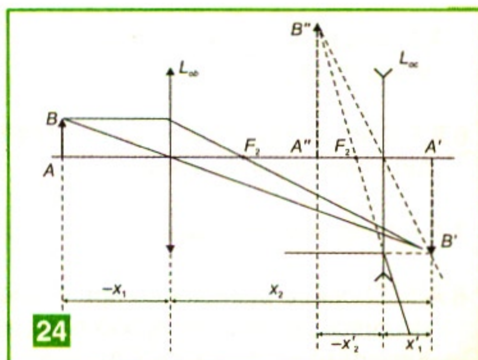
22

Extinderi pentru curioși*

1. Luneta astronomică este destinată observării obiectelor de la distanțe foarte mari, astfel că razele ajung, practic, paralele pe sistemul de lentile.
Prima lentilă, numită lentilă **obiectiv**, este o lentilă convergentă și formează o imagine reală *A'B'*, răsturnată și situată în planul ei focal imagine. Această imagine este obiect real pentru cea de-a doua lentilă, convergentă și ea, numită lentilă **ocular**, astfel că aceasta va forma o imagine virtuală *A"B"* pe care o vom privi cu ochiul.
Imaginea obținută cu luneta astronomică este răsturnată, dar acest lucru este neesențial în cazul observării obiectelor astronomice. 23 Deoarece ochiul preferă să privească fără efort de acomodare imaginea *A"B"*, aceasta trebuie să se afle la distanță foarte mare de sistemul de lentile, și din această cauză, *A'B'* este situat, practic, în focarul obiect al lentilei ocular.

2. Luneta terestră, numită și luneta lui Galilei, este un sistem care formează, pentru obiecte terestre îndepărtate, imagini virtuale, drepte, observabile cu ochiul liber. 24 Luneta terestră este compusă dintr-o lentilă obiectiv convergentă și o lentilă ocu-





lar divergentă. Imaginea reală formată de lentila obiectiv joacă rol de obiect virtual pentru lentila divergentă, ea formându-se între lentilă și focarul obiect al acesteia. Lentila divergentă formează o imagine virtuală. Deoarece ochiul preferă să privească neacomodat, imaginea formată de obiectiv este situată practic în focarul obiect al lentilei divergente.
Binoclul este tot o lunetă terestră.

Pentru curioși

Temă grafică

Desenează imaginea finală a unui obiect obținută prin următoarele sisteme afocale:

1. două lentile convergente, la care focarul imagine al uneia coincide cu focarul obiect al celeilalte;
2. o lentilă convergentă și o lentilă divergentă, la care focarele din dreapta fiecărei lentile coincid;
3. o lentilă divergentă și o lentilă convergentă, la care focarele din stânga fiecărei lentile coincid.

TESTE

Citește următoarele afirmații și răspunde (pe caiet) cu A dacă afirmația respectivă este adevărată sau cu F dacă este falsă:

1 A F. Imaginea virtuală a unui obiect se află la intersecția unei raze de lumină cu alte raze.

2 A F. Un punct imagine este considerat real dacă s-a format la intersecția unei raze de lumină cu prelungirea altei raze.

3 A F. Punctul în care se intersectează razele de lumină provenite de la un obiect situat la infinit se numește focar imagine.

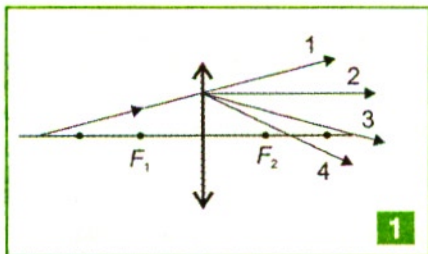
4 A F. Imaginea unui obiect printr-o lentilă plan-concavă situată în aer poate fi mai mare decât obiectul.

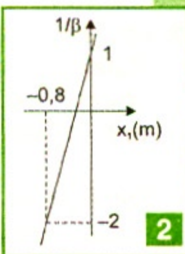
5 A F. Imaginea virtuală a unui obiect, obținută printr-un sistem optic, nu poate fi fotografiată.

6 A F. Distanța focală obiect a unei lentile biconvexe situată în aer este pozitivă, conform convenției de semne.

7 A F. Imaginea unui obiect printr-o lentilă biconvexă este întotdeauna răsturnată.

8 A F. Stropirea plantelor cu apă în zilele însorite produce opărirea și uscarea lor, deoarece picăturile de apă rămase pe frunze sunt lentile care focalizează radiațiile luminoase pe frunze sau în interiorul lor.





9 A F. Focarul imagine și focarul obiect sunt situate simetric față de orice lentilă, dacă lentila este mărginită de același mediu pe ambele părți.

10 A F. Distanțele focale cresc la introducerea lentilelor de sticlă în apă.

11 A F. Alipind două lentile convergente se obține o scurtare a distanței focale a sistemului echivalent față de distanța focală a fiecărei lentile.

12 A F. Planul focal al unei lentile este întotdeauna perpendicular pe axa optică principală.

Probleme

1. O rază de lumină cade pe o lentilă convergentă conform desenului **1**.
Raza emergentă este:
a) 1; b) 2; c) 3; d) 4.

2. Graficul **2** caracterizează o lentilă subțire. Se poate afirma că distanța focală a lentilei subțiri este:
a) 0,26 m; b) –0,26 m; c) 0,32 m; d) –0,32 m.

3. Un obiect de mărime 10 cm formează într-o lentilă convergentă o imagine răsturnată de mărime 10 cm, când se află la distanța 20 cm față de aceasta. Distanța focală este:
a) 5 cm; b) 10 cm; c) 15 cm; d) 20 cm.

4. O lentilă biconvexă are razele de curbură egale în modul, 10 cm, și n = 1,5 în raport cu aerul. Se așază un obiect liniar perpendicular pe axa optică, la 15 cm față de lentilă. Poziția imaginii se găsește, față de lentila convergentă, la:
a) $x_2 = -5$ cm; b) $x_2 = 30$ cm; c) $x_2 = 21{,}3$ cm; d) $x_2 = -3{,}3$ cm.

5. În stânga unei lentile convergente cu $f = 15$ cm se poziționează, perpendicular pe axa optică principală a lentilei, la 5 cm de acesta, un obiect cu înălțimea $y_1 = 10$ cm. Care este înălțimea imaginii ?
a) 40 cm; b) 30 cm; c) 25 cm; d) 15 cm.

6. O lentilă are convergența $C = 2\ m^{-1}$. Dacă imaginea se formează la 60 cm față de lentilă, în dreapta ei, obiectul se așază față de lentilă la:
a) $x_1 = -1$ m; b) $x_1 = -2$ m; c) $x_1 = -3$ m; d) $x_1 = -4$ m.

7. Imaginea unui obiect așezat în stânga unei lentile convergente se formează la distanța $d = 1$ m față de obiect; ea este răsturnată și de patru ori mai mare decât obiectul. Distanța focală a lentilei este:
a) $f = 16$ cm; b) $f = 32$ cm; c) $f = 48$ cm; d) $f = 64$ cm.

8. Imaginea unui obiect, cu înălțimea $y_1 = 10$ cm, așezat în stânga la 28 cm față de o lentilă divergentă cu $f = -7$ cm, este virtuală, dreaptă și cu înălțimea:
a) $y_2 = 0{,}1$ cm; b) $y_2 = 2$ cm; c) $y_2 = 5$ cm; d) $y_2 = 8$ cm.

9. Cea mai mică distanță dintre un obiect real și imaginea sa reală obținută cu o lentilă convergentă este:
a) $4f$; b) $3f$; c) $2f$; d) f.

10. Două lentile convergente subțiri, cu distanțele focale $f = f' = 15$ cm, sunt așezate coaxial la distanța de 10 cm una față de cealaltă. Dacă obiectul AB se îndepărtează foarte mult, atunci fasciculul de raze paraxiale converge într-un punct, situat, față de ieșirea din a doua lentilă, la distanța:
a) $x'_2 = 15$ cm; b) $x'_2 = 3{,}75$ cm; c) $x'_2 = -15$ cm; d) $x'_2 = 7{,}5$ cm.

11. Imaginea unui obiect luminos are mărirea $\beta = -6$ față de o lentilă convergentă. Dacă obiectul este îndepărtat cu $d = 10$ cm, atunci mărirea devine $\beta' = -4$. Distanța focală a lentilei este:
a) $f = 40$ cm; b) $f = 80$ cm; c) $f = 120$ cm; d) $f = 60$ cm.

12. Un obiect de mărime 10 cm formează o imagine reală, dacă se află la distanța 60 cm de o lentilă convergentă cu distanța focală de 10 cm. Înălțimea imaginii formate de lentilă este:
a) 5 cm; b) 8 cm; c) 2 cm; d) 20 cm.

13. În stânga unei lentile convergente cu $f = 10$ cm, la 15 cm, se găsește un obiect luminos. În raport cu lentila, imaginea se găsește la:
a) $x_2 = 10$ cm; b) $x_2 = -10$ cm; c) $x_2 = 30$ cm; d) $x_2 = 10$ m.

14. La distanța de 30 cm de o lentilă convergentă cu convergența 4 δ se așază, perpendicular pe axa optică, un obiect liniar luminos, iar imaginea se obține pe un ecran așezat într-o poziție convenabilă. Menținând obiectul fixat la distanța de 1,2 m de lentilă, se așază către ecran o a doua lentilă divergentă, cu convergența de $-1{,}25$ δ. Cu cât trebuie să se deplaseze ecranul și în ce sens pentru ca în acest caz imaginea să se formeze pe ecran la:
a) 48 cm spre dreapta? b) 12 cm spre stânga?
c) în același pe loc? d) 18 cm spre dreapta?

15. O lentilă convergentă, cu $f = 20$ cm, și una divergentă cu $f' = -10$ cm, sunt așezate coaxial la distanța $d = 20$ cm una față de alta. În stânga lentilei convergente, la 60 cm de ea, se află un obiect. Imaginea finală se formează la:
a) $x'_2 = 30$ cm; b) $x'_2 = -30$ cm; c) $x'_2 = \infty$; d) $x'_2 = 10$ cm.

Probleme pentru curioși și performeri

1. De o lentilă cu convergența $C_1 = 10\ \delta$ se alipește central o a doua lentilă, având convergența $C_2 = -2\ \delta$. în fața primei lentile se așază un obiect real la distanța de 25 cm față de aceasta. Să se precizeze:

a) natura celor două lentile și care este distanța focală a sistemului echivalent;

b) unde se formează imaginea fața de sistemul echivalent, precum și natura imaginii;

c) dacă lentila C_2 se depărtează de lentila C_1 cu 20/3 cm, care este natura imaginii finale față de lentila din dreapta și care este poziția acesteia față de lentila din dreapta?

2. O lentilă convergentă are distanța focală de 30 cm. În fața lentilei se așază un obiect liniar la distanța de 40 cm de aceasta. În spatele lentilei convergente, la 1,1 m de aceasta, se așază o a doua lentilă, divergentă, cu distanța focală 20 cm. Să se afle:

a) unde trebuie așezat ecranul, în lipsa lentilei divergente, pentru ca imaginea să se formeze pe acesta și să se realizeze grafic mersul razelor de lumină ?

b) cu cât și în ce sens trebuie deplasat ecranul pentru ca imaginea să se formeze pe acesta după așezarea lentilei divergente?

c) care trebuie să fie distanța dintre cele două lentile, în cazul în care cu ajutorul acestora se formează un sistem afocal și care va fi mărirea liniară transversală a acestui sistem, dacă prima este lentila convergentă?

3. Pe o lentilă convergentă cu distanța focală $f_1 = 40$ cm cade un fascicul de lumină paralel cu axa optică principală și de diametru $d_1 = 10$ cm. În spatele lentilei convergente se așază a doua lentilă divergentă, cu $f_2 = -10$ cm, astfel încât fasciculul iese tot paralel din sistemul de lentile.

a) Calculați distanța dintre lentile. Desenați mersul razelor de lumină.

b) Care va fi diametrul d_2 al fasciculului emergent?

4. Un teleobiectiv este format dintr-o lentilă divergentă cu convergența $C_1 = -10\ \delta$ și o lentilă convergentă cu convergența $C_1 = 8\ \delta$ aflate la distanța $d = 7{,}5$ cm una de cealaltă. În fața lentilei divergente se așează un obiect la distanța de 30 cm. Să se afle:

a) care sunt distanțele focale ale celor două lentile;

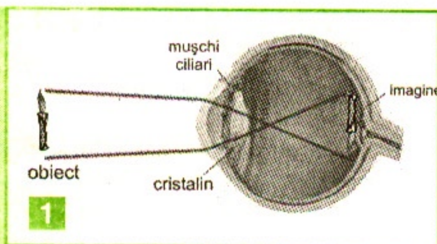
b) unde trebuie așezată o peliculă fotografică față de lentila convergentă pentru ca imaginea să se formeze pe aceasta;

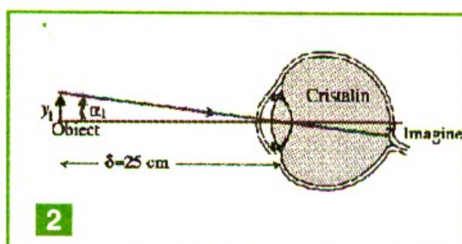
c) să se realizeze grafic mersul razelor de lumină și să se precizeze care este mărirea liniară transversală a sistemului de lentile.

1.3 OCHIUL

Analiza funcționării ochiului din punct de vedere optic

Ochiul este un receptor complex care transformă imaginile formate pe retină în senzații vizuale. Ca sistem optic, este format din mediile transparente (umoarea apoasă, cristalinul și umoarea sticloasă) din globul ocular, care este protejat de o membrană (sclerotică), transparentă doar în zona din față (cornee). 1 Lumina pătrunde prin pupila din irisul pigmentat; pupila își reduce diametrul la iluminare intensă, pentru a proteja retina. Imaginile de pe retină sunt răsturnate. Retina este o membrană subțire, care conține două tipuri de celule: conurile (celule care percep lumina intensă și produc senzații dependente de culori) și bastonașele (celule care percep lumina slabă, incapabile de a distinge alte culori în afară de verde și albastru). Ochiul este mai sensibil ziua la nuanțele culorilor verde-galben, iar în amurg este sensibil numai la nuanțele culorilor verde-albastru. Cristalinul (lentilă biconvexă nesimetrică) își schimbă convergența sub acțiunea ligamentelor (mușchilor ciliari) pentru a forma imaginea pe retină, la distanța x_2 = 15-17 mm de el. Ochiul normal are focarul pe retină, astfel încât obiectele îndepărtate situate către infinit (practic, la distanțe mai mari de 6 m – *punctum remotum*, P. R.) formează imaginile pe retină fără efort de acomodare; mușchii ciliari sunt relaxați și nu schimbă convergența cristalinului, care se comportă ca o lentilă subțire. Când privim obiectele plasate la **distanța minimă de vedere clară distinctă**, loc numit *punctum proximum*, P.P. (distanță care, pentru un ochi normal, este 25 cm), imaginea se formează pe retină cu efort de acomodare (cristalinul se bombează sub acțiunea mușchilor ciliari), dar fără senzație de oboseală. 2 Cristalinul poate să își modifice curbura și distanța focală atunci când sunt privite obiecte relativ apropiate de punctum proximum. Deplasând privirea de la punctum remotum (P.R.) la punctum proximum (P.P.), convergența cristalinului crește până la o valoare maximă, deoarece distanța sa focală se micșorează corespunzător, de la o valoare maximă la o valoare minimă. Puterea de acomodare a ochiului este normală dacă modificarea convergenței cristalinului are valoarea ΔC = 4 dioptrii, corespunzătoare limitei de vedere distinctă (imagine clară).





Defecte de vedere și corectarea acestora

Ochiul cu defecte de vedere formează imagini neclare pe retină.

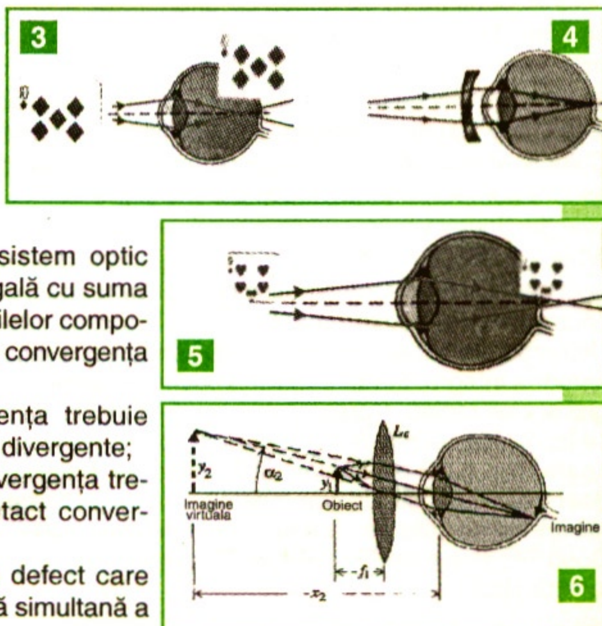
Ochiul miop nu vede clar obiectele îndepărtate, este mai alungit și cristalinul concentrează razele de lumină provenite dinspre punctum remotum în focarul situat în fața retinei și nu pe retină. **3** Ochiul miop are atât punctum remotum, cât și punctum proximum mai apropiate decât ochiul normal și nu poate vedea obiectele aflate mai departe de punctum remotum. Pentru obținerea imaginilor clare se folosesc ochelari, astfel încât sistemul ochi-ochelari acționează ca un „ochi“ cu convergență normală. Defectul se corectează cu lentile divergente, comandate astfel încât focarul lor, F_2, (virtual) să se afle în punctum remotum al ochiului miop. Lentilele divergente ale ochelarilor împrăștie razele de lumină astfel încât imaginea se formează clar pe retină. **4**

Ochiul hipermetrop este mai turtit decât ochiul normal și vede obiectele îndepărtate numai cu efort de acomodare, iar pe cele apropiate nu le vede clar. Cristalinul ochiului hipermetrop nu refractă suficient razele de lumină paralele, astfel încât focarul, în loc să fie pe retină, este situat în spatele ei. **5** Defectul se corectează cu lentile convergente care permit focalizarea imaginii pe retină, mărind convergența sistemului lentilă-cristalin pentru a forma imagini clare pe retină. **6**

Ochiul prezbit nu vede bine nici obiectele apropiate și nici pe cele depărtate de ochi. Din această cauză trebuie corectat cu lentile atât vederea de aproape cât și cea la distanță. Corecția vederii se face cu lentile. Prezbitismul se instalează o dată cu înaintarea în vârstă. Din această cauză bătrânii folosesc ochelari și pentru vedere la distanță. Unii utilizează ochelari bifocali cu care pot vedea la distanță și pentru citit.

Dacă punctum proximum coincide cu punctum remotum, prezbitismul este total.

Lentilele de contact și cele ale ochelarilor suplinesc imposibilitatea fiziologică de acomodare a ochiului. Distanța dintre lentila ochelarilor și globul ocular poate fi neglijată, în cazul ochelarilor, și este nulă în cazul lentilelor de contact.



Deoarece convergența unui sistem optic centrat de lentile alipite este egală cu suma algebrică a convergențelor lentilelor componente, iar cristalinul ochiului are convergența pozitivă, observăm că:

– în cazul miopiei, convergența trebuie micșorată cu lentile de contact divergente;

– în cazul hipermetropiei, convergența trebuie mărită cu lentile de contact convergente.

Astigmatismul reprezintă un defect care face imposibilă focalizarea clară simultană a



razelor provenite de la puncte ale obiectului aflate în plane perpendiculare, datorită faptului că suprafața corneei nu este sferică, ci curbată mai pronunțat într-un plan decât în planul perpendicular pe primul. Acest defect se corectează cu ajutorul lentilelor cilindrice, care au curburi diferite în cele două plane perpendiculare.

Daltonismul este un defect de vedere care se manifestă prin incapacitatea persoanei de a deosebi culorile. El este cauzat de un defect la nivelul retinei ochiului. Primul studiu al acestui fenomen a fost elaborat de chimistul englez John Dalton. Daltonismul total se manifestă prin perceperea tuturor culorilor sub forma unor nuanțe de gri, iar daltonismul parțial se manifestă prin incapacitatea de a deosebi culorile roșu și verde. 7 Daltoniștii învață să distingă culorile după strălucirea lor și de aceea majoritatea nu sunt conștienți de defectul lor vizual. Persoanele care au acest defect nu pot obține un carnet de conducere autovehicule.

LECTURĂ

Vederea cromatică

Te-a fascinat și pe tine bogăția nuanțelor cromatice oferite de orga de lumini din discoteci? Aceste nuanțe se obțin din lumina albă, cu ajutorul filtrelor colorate. Toate culorile percepute pot fi rezultatul combinațiilor a trei culori numite primare: roșu, verde și albastru, la care sunt sensibile trei tipuri de conuri, conținând pigmenți ce absorb lumină în domenii spectrale diferite. Senzația de culoare ia naștere în urma acțiunii radiațiilor electromagnetice asupra conurilor din retina ochiului. Nuanța de culoare depinde de lungimea de undă a radiațiilor. Ochiul uman transmite creierului semnale bioelectrice care depind de energia radiațiilor electromagnetice și de lungimile de undă ale acestora. Spectrul culorilor din domeniul vizibil se definește prin intervalele lungimilor de undă: roșu (700-630 nm), oranj (630-595 nm), galben (595-560 nm), verde (560-500 nm), albastru (500-450 nm) și indigo-violet (450-400 nm).

Culorile au calitatea de a produce în creier reacții cu influențe pozitive sau negative asupra comportamentului sau psihicului. De aceea, culorile din mediul ambiant sau cele ale ținutei vestimentare pot influența randamentul muncii unui om.

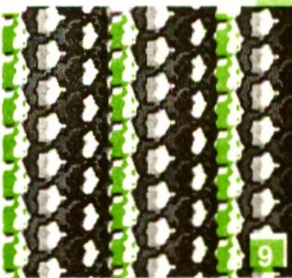
Albastrul mării îți redă încrederea în forțele tale! Culorile albastru, violet și verde sunt numite „reci". Combinațiile contrastante (negru pe alb sau alb pe albastru) concentrează privirea. Verdele din natură are efect odihnitor.

Un corp iluminat apare alb ochiului uman dacă reflectă sau transmite după refracție aproape integral toate radiațiile spectrului vizibil și apare negru dacă absoarbe integral aceste radiații. Corpurile cu suprafețe închise la culoare expuse la lumina Soarelui se încălzesc cel mai mult, deoarece absorb mai multă lumină decât reflectă. Un corp apare roșu dacă din lumina albă absoarbe radiațiile verzi și albastre și reflectă difuz doar radiațiile roșii. Un corp poate să ne pară colorat diferit dacă este iluminat cu radiații diferite de cele pe care le poate reflecta: o roșie apare neagră în lumină verde. 8

Două **culori** sunt **complementare** dacă, amestecate aditiv, în anumite proporții, dau lumină albă.

Din amestecul în diferite proporții al **culorilor primare** (roșu, verde și albastru), rezultă orice altă culoare, dar din amestecul a două culori primare nu poate fi obținută a treia culoare primară. Din amestecul celor trei culori primare, de intensități aproximativ egale, ochiul percepe lumină albă. Dacă privești imaginile de pe ecranul televizorului printr-o lupă, vei vedea șiruri verticale colorate (roșii, verzi și albastre) care își modifică mereu strălucirea. **9** Imaginile colorate sunt rezultatul unui **amestec aditiv**. Pe interiorul ecranelor televizoarelor și monitoarelor au fost depuse trei substanțe fluorescente, în șiruri verticale, grupate câte trei pe arii mici (numite pixeli). Când sunt ciocnite de trei fascicule de electroni (baleiate vertical de zeci de ori pe secundă), emit lumină roșie, verde și albastră. Nuanțele de culori sunt generate de variația intensității fasciculelor electronice.





Amestecul aditiv al culorilor primare poate fi realizat pe un ecran difuzant cu ajutorul a trei proiectoare cu filtre colorate. Lumina reflectată de ecranul iluminat sau lumina transmisă prin filtre reprezintă radiațiile neabsorbite din lumina albă a surselor luminoase. Ecranul apare roșu dacă este luminat numai cu radiație roșie și apare galben dacă este luminat în culorile complementare roșu și verde. Rezultă că ochiul nu discerne două sau mai multe radiații de culori diferite care ajung simultan pe retină, ci o altă culoare.

Probleme rezolvate

1. Un miop vede fără ochelari să citească la distanța $d = 15$ cm. Cu ce lentile își corijează miopul vederea, dacă distanța optimă de vedere pentru un ochi normal este $d_0 = 25$ cm?

Rezolvare

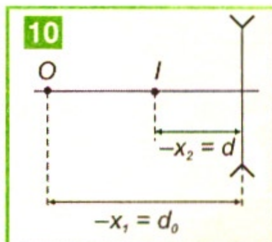
Lentila preia obiectul de la d_0 și îi formează o imagine virtuală la distanța d la care vede ochiul. **10** Aplicăm formula lentilelor subțiri:

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \rightarrow -\frac{1}{d} + \frac{1}{d_0} = \frac{1}{f},$$

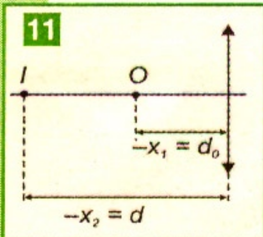
$$f = \frac{dd_0}{d - d_0} = -37{,}5 \text{ cm}$$

$$C = \frac{1}{f} = -2{,}66 \text{ m}^{-1}.$$

Deci corecția vederii miopului se face cu lentile divergente.



2. Un hipermetrop vede fără ochelari obiectele situate la $d = 40$ cm. Cu ce lentile își va corecta acesta vederea, dacă distanța optimă de vedere pentru un ochi normal este $d_0 = 25$ cm?



Rezolvare

La fel ca în cazul miopului, lentila corectoare preia obiectul de la d_0 și îi formează tot o imagine virtuală la distanța d la care vede ochiul; **11**

$$f = \frac{dd_0}{d - d_0} = 66{,}66 \text{ cm};$$

$$C = \frac{1}{f} = 1{,}5 \text{ m}^{-1}.$$

Deci corecția vederii hipermetropului se face cu lentile convergente.

3. Un om vârstnic are punctul remotum la $d = 2$ m. Ce lentile trebuie să utilizeze el pentru a putea vedea, practic, până la infinit?

Rezolvare

Lentila va prelua obiectul de o distanță infinit de mare și-i va forma o imagine virtuală în punctum remotum al ochiului.

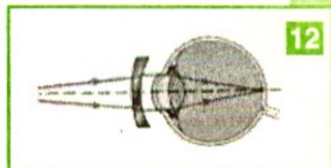
$$x_1 \to -\infty \Rightarrow \frac{1}{x_2} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = x_2 = -d = -2 \text{ m}.$$

$$C = \frac{1}{f} = -0{,}5 \text{ m}^{-1}.$$

În concluzie omul trebuie să utilizeze lentile divergente.

TESTE

La următoarele afirmații răspundeți cu A dacă afirmația respectivă este adevărată sau cu F dacă este falsă:



1 A F. Ochiul normal are limita de vedere distinctă cu acomodare maximă la $d_0 = 25$ cm.

2 A F. Miopul vede clar obiectele dacă își apropie mult ochii de ele.

3 A F. Miopia reprezintă o tulburare a vederii caracterizată prin incapacitatea de a vedea clar obiectele îndepărtate, deoarece imaginea acestora se formează în fața retinei și puterea de acomodare redusă a ochiului nu permite aducerea imaginii pe retină.

4 A F. Lentilele de corecție ale ochelarilor de vedere readuc vederea la convergența normală, deoarece ochiul cu anomalii de vedere are puterea de acomodare insuficientă aducerii imaginii pe retină. 12

5 A F. Lentilele divergente ($C_L < 0$) ale ochelarilor folosiți de către miopi măresc puterea de acomodare existentă, deoarece sistemul ochi cu ochelari se comportă ca un ochi cu convergență aproape normală.

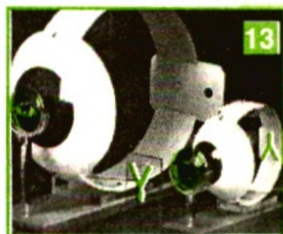
6 A F. Lentilele divergente ale ochelarilor convertesc punctum remotum al miopului în punctum remotum al unui ochi normal.

7 A F. Lentilele convergente ale ochelarilor convertesc punctum proximum al prezbitului în punctum proximum al unui ochi normal.

8 A F. Prezbitismul reprezintă o tulburare de vedere care apare în special la vârsta medie, caracterizată prin scăderea puterii de acomodare a cristalinului, astfel că obiectele îndepărtate apar mai clare decât cele apropiate, deoarece cristalinul păstrează, datorită obișnuinței de a privi la depărtare sau datorită sclerozei, o distanță focală permanent mare, imaginea formându-se în spatele retinei, ca și în hipermetropism.

Probleme

1. Când privești obiectele apropiate de ochi (aflate la distanța $d \approx 25$ cm, dacă ochiul nu are defecte de vedere), cristalinul se bombează și își micșorează distanța focală pentru a se forma imagini clare pe retină, dar nu mai vedem clar obiectele îndepărtate, deoarece imaginile lor se formează:
a) în fața retinei; b) în spatele retinei; c) deasupra retinei.



2. La iluminarea puternică a obiectelor, pupila ochiului se strânge (ca și diafragma unui aparat de fotografiat 13), și se obțin:
a) imagini mai mari; b) imagini mai mici; c) imagini mai clare decât în cazul diafragmei sau pupilei cu diametrul mare la iluminare slabă.

3. Deoarece hipermetropul nu mai are capacitatea de a bomba suficient cristalinul, micșorarea distanței focale se obține prin folosirea ochelarilor cu:
a) lentile divergente; b) lentile convergente; c) lentile cilindrice.

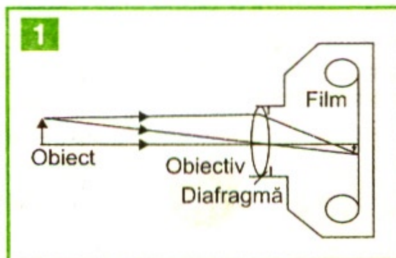
4. Când citește, un om în vârstă trebuie să țină cartea la 50 cm de ochi. Lentila cu care se corijează vederea în acest caz (știind că distanța minimă a vederii clare pentru un ochi normal este $d_0 = 25$ cm) are convergența:
a) $C = -1\ m^{-1}$; b) $C = 2\ m^{-1}$; c) $C = -2\ m^{-1}$; d) $C = -4\ m^{-1}$.

5. Un prezbit vede obiectele situate între 40 cm și 50 cm. Vederea acestui prezbit se corectează cu ochelari bifocali, care au sus o lentilă care îi permite să vadă bine la depărtare și jos o lentilă care îi permite să citească. Ce convergențe au aceste două lentile:
a) Lentila de sus are convergența –2 δ, iar cea de jos are convergerța –6,5 δ;
b) Lentila de sus are convergența 2,5 δ, iar cea de jos are convergența 1,5 δ;
c) Lentila de sus are convergența –2 δ, iar cea de jos are convergeța 1,5 δ;
d) Lentila de sus are convergența 1,5 δ, iar cea de jos are convergența –2,5 δ.

6. Un miop vede clar până la 2 m depărtare de ochi și folosește ochelarii unui miop care vede clar până la 4 m. Până la ce distanță va vedea clar primul miop cu ochelarii celui de-al doilea miop?
a) 16 m; b) 12 m; c) 4 m; d) 2 m.

Alcătuirea și utilizarea aparatului de fotografiat

Instrumentele optice sunt sisteme optice care formează (cu ajutorul lentilelor, diafragmelor și oglinzilor) imagini mărite, permițând observarea unor detalii ale obiectelor pe care în mod normal nu le vedem cu ochiul liber. Imaginile reale se pot obține pe un ecran sau pe o peliculă fotosensibilă, 1 iar cele virtuale se observă cu ochiul liber. **Aparatul de fotografiat** 2 permite fixarea imaginilor reale pe filme fotosensibile. *Obiectivul* aparatului de fotografiat este un sistem optic convergent care formează imagini reale clare, în planul filmului, după punerea la punct prin: deplasarea obiectivului în lungul axei principale, modificarea diafragmei corelată cu timpul de expunere și analiza încadrării prin vizor (independent sau prin obiectiv). Aparatele automate fac singure aceste operații. Pentru înregistrarea imaginilor pe film fotosensibil, lumina de la obiecte trebuie să pătrundă în interiorul unei camere obscure. Pentru obținerea unor imagini clare ale obiectelor plasate la diferite distanțe, operatorul care privește obiectele printr-un vizor reglează obiectivul și diafragma (orificiu de deschidere variabilă). Aparatul fotografic se caracterizează prin distanța focală *f*, diametrul diafragmei reglabile *D*, deschiderea relativă, *D*/*f*, și inversul deschiderii relative, *N* (unde *N* = 1,4; 2; 2,8; 4; 5,6; 8; 11; 16; 22 reprezintă valorile notate pe inelul de reglare al diafragmei).





Obiectivul este un sistem obținut prin alipirea unor lentile convergente și divergente (pentru reducerea aberațiilor cromatice). Diafragma este un orificiu cu deschidere variabilă, care limitează lărgimea fasciculului de lumină care pătrunde în obiectiv și mărește intervalul de distanțe în care pot fi plasate obiectele ale căror imagini sunt clare. În camera obscură dintre obiectiv și caseta cu filmul fotosensibil nu pătrund decât razele de lumină provenite de la obiectele din fața obiectivului.

Formarea imaginilor în aparatul de fotografiat*

Fotografierea cu timpi de expunere diferiți

Înregistrarea în bune condiții a unei imagini pe peliculă sau pe hârtie fotografică necesită ca materialul fotosensibil să fie expus un timp la lumina provenită de la obiectul fotografiat. Timpul necesar expunerii variază în funcție de sensibilitatea peliculei și de condițiile de iluminare. O peliculă sensibilă și un timp foarte scurt de expunere (de exemplu, 4 milisecunde) permit fotografierea unor fenomene care se derulează foarte repede.

Expunerea la un timp mai îndelungat decât cel dictat de cantitatea de lumină și sensibilitatea peliculei face ca fotografiile să pară mișcate. Deși calitatea artistică a unor

astfel de fotografii poate să fie afectată, tehnica permite măsurarea unor parametri ai mișcării (viteza, direcția etc). Expunerea unor pelicule puțin sensibile sau în condiții de iluminare redusă poate oferi informații noi.

Important! Nu privim direct sau prin aparate spre surse laser deoarece este afectată vederea.

Fotografierea stroboscopică

În studiul desfășurării fenomenelor, avantajul fotografierii cadru cu cadru pe film, constă în faptul că ipostaze diferite sunt surprinse de cadre diferite.

O fotografie surprinde o singură ipostază (dacă timpul de expunere este scurt) sau amestecă un număr foarte mare de ipostaze (dacă timpul de expunere este foarte lung). Fotografia stroboscopică încearcă să realizeze un compromis, expunând pe același cadru imagini luate la intervale egale de timp, fără să înregistreze situațiile intermediare. 3 Înregistrarea stroboscopică se obține cu un aparat de fotografiat care are, în fața obiectivului, un disc cu orificiu rotit de un motoraș. Pe film se înregistrează, pe o durată de ordinul milisecundelor, poziția instantanee a obiectului când orificiul discului este în fața obiectivului.

3



Problemă rezolvată

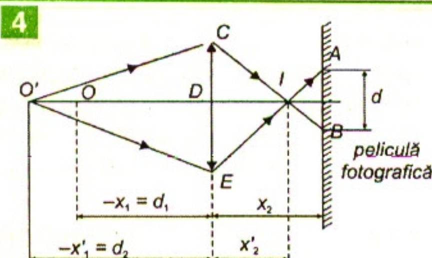
Se fotografiază un obiect aflat la distanța $d_1 = 4$ m, cu un aparat foto cu un obiectiv care are distanța focală $f = 20$ cm. Pentru a fotografia același obiect, dar de la distanța $d_2 = 5$ m, astfel ca imaginea să nu depășească înălțimea $d = 0{,}2$ mm, se diafragmează obiectivul. Să se calculeze valoarea diametrului diafragmei.

Rezolvare

Aparatul de fotografiat se comportă ca o lentilă convergentă. Aflăm unde este așezată pelicula fotografică față de obiectiv, deoarece pe ea se formează o imagine reală a obiectului O aflat la distanța d_1. 4 Utilizăm formula lentilelor subțiri, cu $x_1 = -d_1 = -4$ m.

$$\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{f} \Rightarrow x_2 = \frac{fx_1}{f + x_1} := 21{,}05 \text{ cm}$$

4



Pentru obiectul O' aflat la distanța d_2, imaginea punctiformă se va forma la $x_2' = 20{,}83$ cm, iar pe pelicula fotografică imaginea va fi o pată luminoasă. Pentru ca aparatul fotografic să perceapă imaginea ca un punct, trebuie ca AB să nu depășească valoarea 0,2 mm, numită putere separatoare liniară a aparatului. Utilizând asemănarea triunghiurilor CEI și IAB se obține:

$$\frac{D}{d} = \frac{x_2'}{x_2 - x_2'} \Rightarrow D = 1{,}9 \text{ cm},$$

unde D este diafragma obiectivului.

Alcătuirea și utilizarea microscopului optic

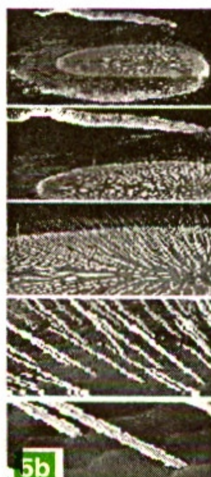
Microscopul optic este un sistem optic complex folosit pentru vizualizarea obiectelor mici ($y_1 < 0{,}5$ mm), care nu pot fi văzute cu ochiul liber, **5a** . Este format din două sisteme de lentile convergente: obiectiv și ocular. **Obiectivul** formează imagini reale și mărite ale obiectului AB plasat în apropierea planului său focal obiect. Aceste imagini devin obiecte pentru ocular și sunt plasate în apropierea planului focal al acestuia. **Ocularul** este un sistem optic format din una sau mai multe lentile, care formează imagini virtuale, mărite și drepte, ale obiectelor situate între focar și lentilă.

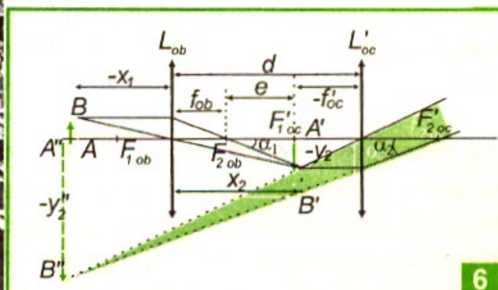
Formarea imaginilor în microscopul optic*

Cristalinul ochiului focalizează pe retină razele, aproximativ paralele, emergente din ocular. Observatorul deplasează tubul microscopului față de obiect până vede clar imaginea finală, fără efort de acomodare, a preparatului studiat. **5b** Un obiect liniar, de înălțime y_1, așezat perpendicular pe axa optică principală a ochiului în punctum proximum (P.P.) la distanța de vedere distinctă $d_0 \approx 0{,}25$ m (pentru ochiul normal), este văzut sub un unghi α față de axa ochiului. Lentila obiectiv L_{ob} formează pentru obiectul real AB o imagine reală $A'B'$ care joacă rol de obiect real pentru lentila ocular L'_{oc}, care în final va forma o imagine virtuală, mult mărită $A''B''$ a obiectului. **6** Cristalinul ochiului în stare relaxată poate face ușor focalizarea imaginii date de ocular, dacă $A'B'$ este situat foarte aproape de $F'_{1\,oc}$, focarul obiect al lentilei ocular; deci imaginea este percepută fără efort de acomodare.

Microscopul se caracterizează prin **grosismentul** G (definit ca raportul dintre modulele diametrului aparent al imaginii și diametrului aparent al obiectului, privite la distanța $d_0 = 0{,}25$ m).


5a


5b



6

În cazul în care ochiul privește fără efort de acomodare:

$$\left|\text{tg}\alpha_2\right| = \frac{\left|y_1'\right|}{f_{oc}'}, \quad \text{tg}\alpha_1 = \frac{y_1}{d_o},$$

$$G = \frac{\left|\text{tg}\alpha_2\right|}{\left|\text{tg}\alpha_1\right|} = \frac{d_0}{f_{oc}} \cdot \frac{\left|y_1'\right|}{y_1} = \frac{d_0}{f_{oc}'} \cdot \frac{e}{f_{ob}} = P \cdot d_0,$$

deoarece
$$\frac{\left|y_1'\right|}{y_1} = \frac{e}{f_{ob}},$$

unde *e* intervalul optic – este distanța dintre focarul imagine, $F_{2,\text{ob}}$, al lentilei obiectiv și focarul obiect $F'_{1,\text{oc}}$ al lentilei ocular, iar *P* este puterea optică a microscopului (raportul dintre modulul tangentei sub care se vede prin microscop imaginea și înălțimea obiectului).
Grosismentul este adimensional.

$$P = \frac{\left|tg\alpha_2\right|}{y_1} \approx \frac{1}{f_{oc}'} \cdot \frac{\left|y_1'\right|}{y_1} = \frac{1}{f_{oc}'} \cdot \frac{e}{f_{ob}}.$$

Puterea optică are dimensiunea unei convergențe:

$$[P]_{SI} = \text{m}^{-1}.$$

În practică, microscoapele dispun de mai multe obiective și oculare, care pot fi utilizate în diferite combinații, putându-se realiza astfel diferite puteri.

Probleme rezolvate

1. Obiectivul și ocularul unui microscop au distanțele focale $f_{ob} = 1{,}6$ cm și, respectiv, $f_{oc} = 2{,}5$ cm, iar distanța dintre centrele lor optice este $d = 22{,}1$ cm. Punerea la punct este, practic, pentru infinit. Să se calculeze unde trebuie așezat obiectul față de obiectiv.

Rezolvare:

Punerea la punct pentru infinit implică formarea imaginii obiectului prin obiectiv în focarul ocularului. Față de obiectiv, imaginea intermediară se formează la distanța $x_2 = d - f_{\text{oc}} = 19{,}6$ cm. Cu formula lentilelor obținem $x_1 = -1{,}74$ cm.

2. Un microscop are distanța focală a obiectivului $f_1 = 5{,}4$ mm, iar a ocularului $f_2 = 2$ cm. Preparatul se așază față de obiectiv la distanța 5,6 mm. Observatorul care privește prin ocular deplasează ocularul față de obiectiv, astfel ca imaginea preparatului să se formeze între *punctum proximum* $d_0 = 25$ cm și *punctum remotum* (considerat la infinit), printr-o operație cunoscută sub numele de punere la punct a microscopului. Să

se afle pe ce distanță poate să deplaseze observatorul ocularul în urma acestei operații.

Rezolvare

Obiectivul formează imaginea obiectului aflat la $x_1 = -5{,}6$ mm la $x_2 = 15{,}12$ cm de el. Pentru ca observatorul să vadă imaginea în punctum proximum $d_0 = 25$ cm, imaginea formată de lentila obiectiv L_{ob} este situată în stânga lentilei ocular L'_{oc} la $x_1' = -1{,}85$ cm. În acest caz lungimea tubului microscopului este
$d_1 = x_2 - x_1 = 16{,}97$ cm.

Dacă observatorul vede imaginea fără acomodare, atunci imaginea formată de lentila obiectiv L_{ob} este situată în focarul obiect $F_1'{}_{oc}$ al lentilei ocular. În acest caz lungimea tubului microscopului este $d_2 = x_2 + f_2 = 17{,}12$ cm.

Pentru a putea privi imaginea, observatorul poate deplasa ocularul prin operația de punere la punct cu $\Delta d = d_2 - d_1 = 1{,}5$ mm.

Noutăţi pentru curioşi*

Fotografia digitală reprezintă o metodă de a face poze fără a folosi un film fotografic convențional. Un scaner înregistrează informații vizuale pe care le transformă în coduri numerice 0 și 1, coduri care pot fi „citite" de calculator. O cameră digitală poate capta o imagine color cu o rezoluție înaltă, de câteva milioane de pixeli. De pe majoritatea camerelor digitale se pot transfera imagini pentru a fi stocate direct pe calculator; altele au discuri de memorie.

Fotografiile în formă digitală pot fi foarte ușor prelucrate prin intermediul calculatorului și pot fi trimise la distanțe mari prin intermediul e-mail-ului. Reglarea automată a clarității se poate realiza prin sistemul autofocus activ, care constă în emiterea unor radiații infraroșii. Aceste unde se reflectă pe suprafața obiectului fotografiat și se întorc cu informații pentru microcomputerul din interiorul aparatului de fotografiat, care comandă reglajul obiectivului pentru claritatea imaginii.

La camerele moderne de luat vederi (video digitale), imaginile optice se transformă în imagini electrice ale potențialelor microfotocelulelor, care se codifică digital și se transmit la receptor (tub cinescopic care reproduce imaginea obiectelor înregistrate). Reglajele pot fi automate.

Aparatul POLAROID permite obținerea unei fotografii în aproximativ un minut. După expunere, rolele presoare sparg capsulele de material plastic încărcate cu pastă revelatoare-fixatoare, punând în contact banda negativă cu cea pozitivă și se obține un unicat. De pe negativ se pot obține ulterior copii pozitive mărite.

Aparatele de proiecție

Cu videoproiectorul și cu aparatul de proiecție se pot obține, pe un ecran, imagini reale și mărite ale fotografiilor, diapozitivelor, sau foliilor transparente. **7** Obiectivul este format din mai multe lentile **8**, pentru a reduce aberațiile optice, sistemul fiind echivalent cu o lentilă convergentă.


7


8

Pentru curioşi*

Experimente

a) Privește printr-un orificiu îngust, cu diametrul $d < 1$ mm, făcut cu vârful unui ac într-o folie de staniol. Literele unui text se văd clar, cu ochiul adus foarte aproape de orificiu, chiar și de către cei cu defecte de vedere, fără să folosească ochelari! Distanța de citire $d' = 10$-15 cm este mai mică decât cea optimă, $d = 25$ cm. Literele sunt văzute sub un unghi mic prin acest orificiu îngust, ca și obiectele plasate la distanță mare, deci cristalinul ochiului este relaxat. Dacă mărești orificiul cu vârful unui creion, nu mai vezi clar! Dacă privești literele textului prin două orificii circulare, cu diametrul $d < 1$ mm și cu distanța dintre ele $b \approx 1$ mm, vei vedea imaginile suprapuse parțial. Dacă privești filamentul unui bec sau Soarele cu ochiul mai depărtat de orificiul larg sau de cele două orificii, vei observa irizări.

b) Ce observi când privești, printre două degete apropiate, o sursă de lumină?

Difracția luminii reprezintă fenomenul de pătrundere a luminii în spatele obstacolelor și fantelor, deci abaterea de la propagarea rectilinie, astfel încât lumina se propagă și în spatele orificiilor sau obstacolelor, în zona de umbră geometrică. Lumina care pătrunde printre gene sau prin țesături produce irizații care ne plac. Vârful unui corp ascuțit pare „tăiat" de lumina provenită de la o sursă puternică, iar prin fante lumina pătrunde în spatele zonei opace, deci în zona umbrei apare lumină pe distanță mică. 9

9

În concluzie, raza de lumină este modelul folosit pentru propagarea rectilinie a radiațiilor luminoase dacă dimensiunile deschiderilor (diafragmelor) folosite sunt mult mai mari decât lungimea de undă a acestor radiații. La dimensiuni ale deschiderilor comparabile cu lungimea de undă apar fenomene de difracție, a căror analiză depășește domeniul de studiu al opticii geometrice.

Lectură

Iluziile optice ne arată cum interpretează creierul imaginile, comparându-le cu cele deja cunoscute. Care dintre cele două cercuri centrale este mai mare? Triunghiul are o formă imposibilă, dar creierul încearcă să găsească o figură tridimensională. Ultima imagine poate reprezenta o vază sau două chipuri. 10

TESTE

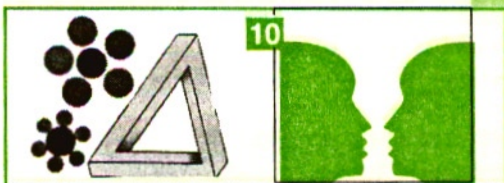
1 A F. Puterea optică a microscopului este adimensională.

2 A F. Puterea optică a microscopului este direct proporțională cu grosismentul acestuia.

3 A F. Dacă un aparat fotografic este folosit pentru a fotografia obiecte din ce în ce mai apropiate, obiectivul aparatului trebuie să se apropie de filmul fotografic.

4 A F. Puterea optică a unui microscop crește cu creșterea intervalului optic al microscopului.

5 A F. Diafragma aparatului fotografic are rolul să producă o profunzime mai mare atunci când diametrul diafragmei este mai mic.



Probleme

1. Obiectivul unui aparat de fotografiat cu distanța focală $f = 5$ cm formează pe film fotografic imagini cu dimensiunile 18 mm x 24 mm. Pentru fotografierea obiectelor îndepărtate, punerea la punct este la:
a) $x_1 \to$ infinit; b) $x_1 = -f$; c) $x_1 = -2f$; d) $x_1 = -4f$.

2. Se fotografiază un obiect de două ori cu același aparat. Când obiectul se află la distanța de 15 m, înățimea imaginii sale pe fotografie este 30 mm, iar când obiectul se află la distanța de 9 m, înățimea imaginii sale pe fotografie este 51 mm. Care este distanța focală a obiectivului aparatului ?
a) 23,3 cm; b) 21,7 cm; c) 42,85 cm; d) 11 cm.

3. Trebuie fotografiat un patinator care are viteza v=10m/s. Distanța focală a obiectivului este 10 cm, iar distanța patinatorului până la aparat este 5 m. Care este timpul de expunere maxim dacă neclaritarea imaginii nu trebuie să depășească 0,2 mm ?
a) 0,5 ms; b) 1 ms; c) 2 ms; d) 2,5 ms.

4. Un obiect trebuie fotografiat cu un aparat de fotografiat al cărui obiectiv are distanța focală 12 cm. Obiectul se află la 15 cm de obiectiv, iar distanța obiectiv placă fotografică este 20 cm. Ce lentilă adițională trebuie folosită pentru a face fotografia ?
a) convergentă cu 15 cm; b) divergentă cu 22 cm;
c) divergentă cu 44 cm; d) convergentă cu 30 cm.

5. Obiectivul unui fotoaparat are două lentile: prima divergentă cu $f_1 = -50$ mm, iar a doua convergentă cu $f_2 = 80$ mm. Lentila divergentă este la distanța $l = 45$ cm de peliculă. La ce distanță de peliculă trebuie așezată lentila convergentă pentru a da imagini clare ale obiectelor de la infinit:
a) 20 cm; b) 30 cm; c) 40 cm; d) 50 cm.

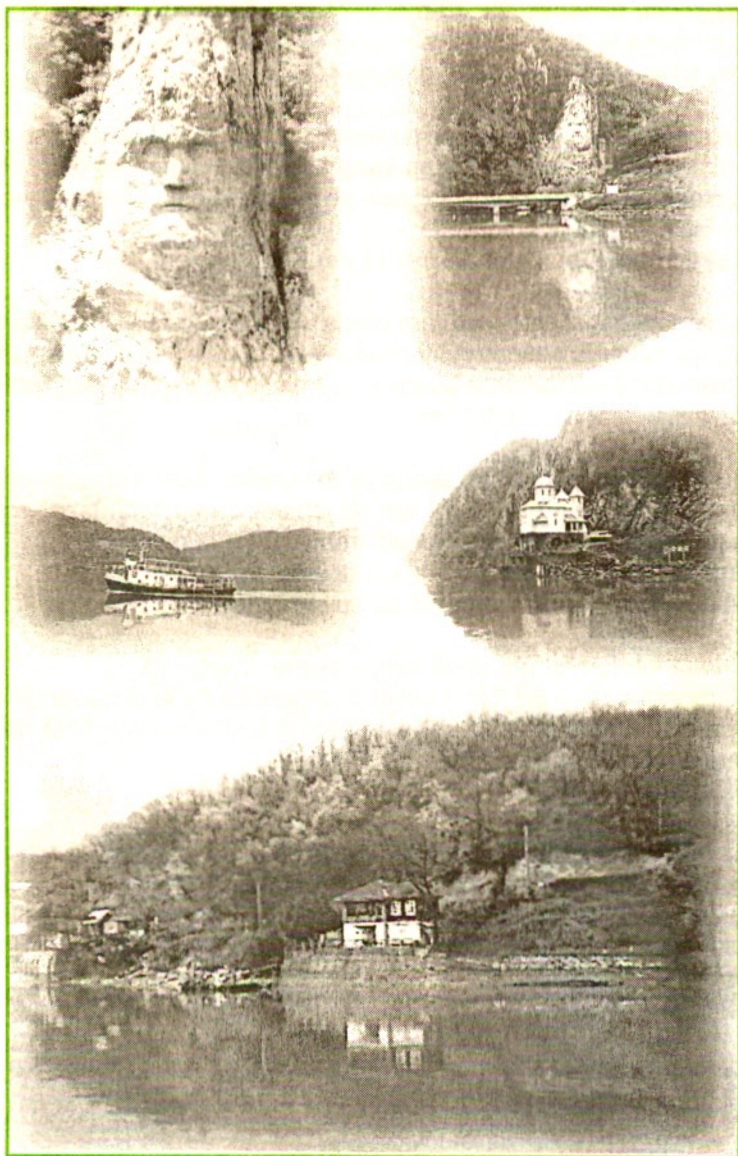
6. Ocularul unui microscop cu distanța focală de 2 cm se află centrat față de obiectivul cu distanța focală de 0,6 cm la o anumită distanță. Obiectul de examinat se găsește la distanța de 5/8 cm în fața obiectivului, iar imaginea dată de microscop este observată la distanța de vedere optimă egală cu 25 cm. Care este grosismentul microscopului ?
a) 432; b) 324; c) 276; d) 521.

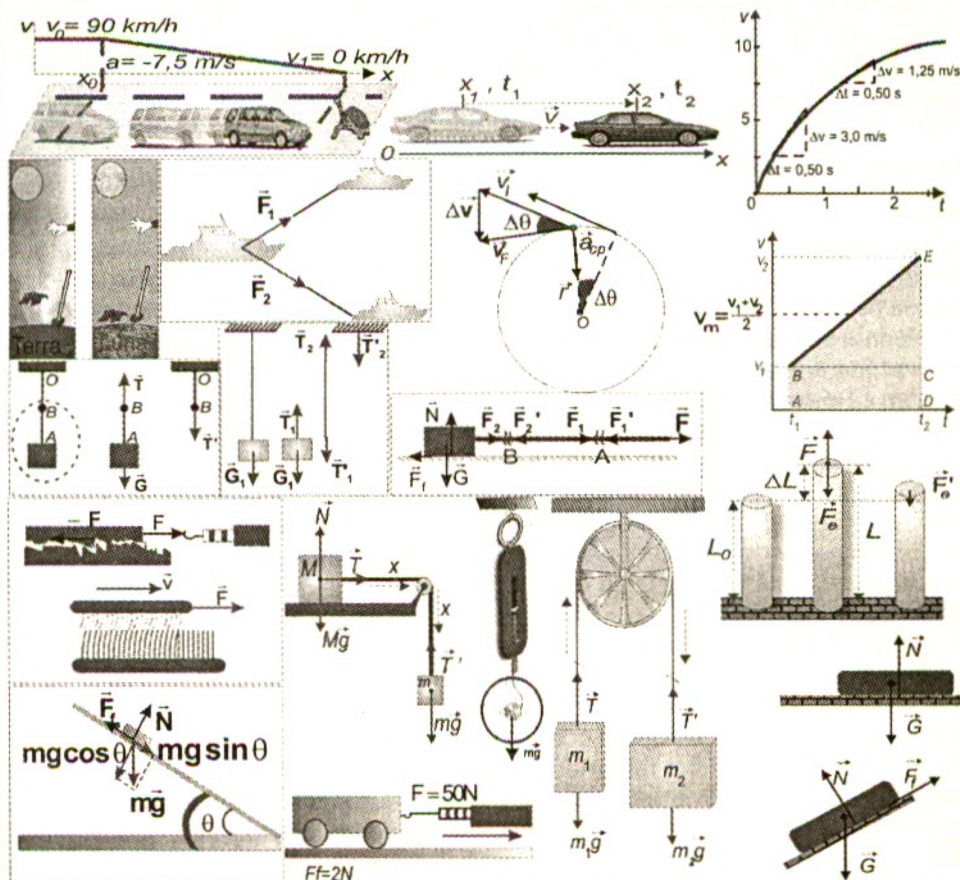
7. O lamă transparentă de grosime $e = 5$ mm este privită printr-un microscop. Dacă se pune la punct microscopul pentru observarea feței superioare a lamei, pentru a

vedea clar fața inferioară obiectivul acestuia se deplasează în jos cu D = 3,5 mm. Indicele de refracție al lamei este:
a) n = 1,5; b) n = 1,43; c) n = 1,48; d) n = 1,53.

Proiect recapitulativ

Alcătuiți un eseu „Natura în imagini" după ce analizați fotografiile de mai jos. Comentați:
a) influența reflexiei de pe suprafața apei asupra calității imaginii obiectelor reflectate;
b) influența nebulozității asupra calității imaginii.





CAPITOLUL 2

PRINCIPII ȘI LEGI ÎN MECANICA NEWTONIANĂ

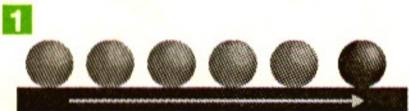
„Dacă privim mișcarea unui tren, atunci o raportăm la suprafața Pământului, pe care o admitem în repaos. Când trenul se oprește la o stație, el se află în repaos în raport cu gara sau în raport cu Pământul. Dar fiindcă Pământul însuși se învârtește împrejurul axei sale și înaintează totodată în calea lui împrejurul Soarelui, repaosul trenului nu este un repaos real sau absolut, ci numai un repaos relativ la Pământ."

M. Eminescu

2.1 MIȘCARE ȘI REPAUS

Definirea mișcării mecanice

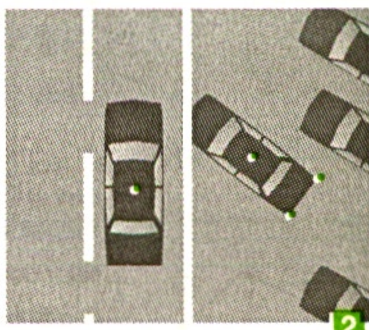
Mișcarea mecanicăa unui corp reprezintă modificarea poziției acestuia în timp, față de alte corpuri.
Pentru a studia mișcarea mecanică a unui punct material trebuie să alegem un corp la care să ne raportăm în orice moment. Acest corp se numește corp de referință. Corpul de referință se mișcă și el la rândul lui față de alte corpuri.
În cazul în care corpul de studiat nu-și modifică poziția față de corpul de referință, spunem că este în repaus.
Repausuleste un caz particular de mișcare mecanică. În timpul mișcării mecanice, corpul de studiat își schimbă în general poziția față de corpul de referință. Pentru a putea preciza mișcarea corpului față de corpul de referință ales, trebuie să cunoaștem simultan poziția și momentul de timp corespunzător. Pentru determinarea poziției la diferite momente de timp sunt necesare *o riglă* și un *ceas*.
Corpul de referință împreună cu rigla și ceasul constituie un *sistem de referință* sau *referențial*.
De remarcat că în mișcarea studiată de noi, la viteze mici, lungimile corpurilor și duratele evenimentelor sunt invariante, adică nu depind de mișcarea corpului studiat și nici de mișcarea instrumentelor de măsură (riglă, ceas).
Pozițiile ocupate succesiv de un corp descriu o curbă numită *traiectorie*.
Traiectoriile corpurilor pot fi foarte variate în practică (de exemplu mișcarea unui șurub, mișcarea unei roți într-o curbă etc.). Cele mai complicate traiectorii pot fi descompuse în traiectorii simple. Traiectoriile pot fi rectilinii sau curbilinii. Cele curbilinii pot fi plane sau în spațiu. În manual vom analiza doar traiectoriile curbilinii plane. Cele mai întâlnite traiectorii sunt rectilinii. 1



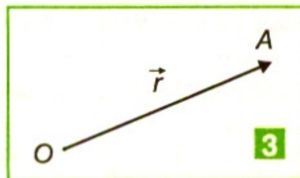
Condițiile în care un corp poate fi descris ca un punct material

Mișcarea mecanică a corpurilor este complicată și de aceea o studiem cu ajutorul unor modele simplificate. Când studiem mișcarea unui bec aflat într-un tren nu ne interesează o serie de proprietăți ale acestuia, cum ar fi faptul că este aprins. Neglijăm astfel proprietățile optice și termice. Dacă studiem o sursă radioactivă aflată în mișcare neglijăm faptul că ea emite radiații și îi neglijăm și proprietățile nucleare. Când un corp cade de la o înălțime oarecare și vrem să aflăm viteza cu care ajunge pe Pământ nu ne interesează dacă la contactul cu Pământul corpul s-a deformat. Presupunem astfel corpul nedeformabil. Un corp nedeformabil se numește *solid rigid* (de exemplu: o bilă, Marte ca planetă care se rotește în jurul Soarelui). Mișcarea solidului rigid este complicată și ea, astfel că o simplificăm neglijând dimensiunile și rotațiile proprii ale acestuia.
Obținem astfel modelul punctului material.

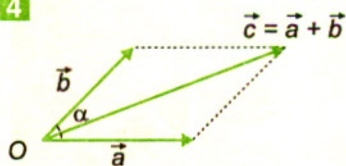
Punctul material reprezintă modelarea unui corp sau a unei părți dintr-un corp printr-un punct în care considerăm concentrată toată masa corpului.
Un corp poate fi mișcare de considerat punct material într-o situație și nu poate fi considerat punct material în altă situație. De exemplu, pentru a preciza poziția unei mașini în mișcare pe distanțe mult mai mari decât dimensiunile acesteia, putem asocia mașinii un punct, dar atunci când parchează, poziția mașinii trebuie precizată prin mai multe puncte. 2

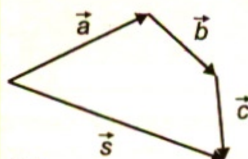


Corpul sferic aflat în translație poate fi aproximat cu un punct material situat în centrul sferei. În mișcarea de translație a unui corp, punctele acestuia parcurg traiectorii paralele între ele cu aceeași viteză.
Considerăm un copil care se află într-un tren care pornește din repaus și ține în mână un măr. Pentru el mărul este în repaus, nu are viteză și are traiectoria un punct. Pentru un om de pe peron, mărul se află în mișcare, are traiecoria rectilinie și se deplasează cu viteza trenului. În cazul în care copilul scapă mărul, pentru el mărul este în mișcare, are traiectoria rectilinie și verticală, iar viteza este îndreptată în jos. Pentru omul de pe peron, mărul se află de asemenea în mișcare, numai că traiectoria pe care el o vede este o curbă, iar viteza își schimbă în permanență orientarea.
Poziția unui punct material, viteza și traiectoria acestuia sunt relative, deoarece depind de sistemul de referință (referențialul) ales. Noi nu sesizăm că ne mișcăm în spațiu cu viteza Pământului pe traiectoria sa ($v_p \approx 30$ km/s).
Unei proprietăți fizice măsurabile i se poate asocia o mărime fizică. **Mărimile fizice scalare** sunt descrise printr-un număr și o unitate de măsură asociată (masa m, densitatea ρ, lungimea l, timpul t), iar **mărimile fizice vectoriale** (accelerația $\vec{a}$, viteza $\vec{v}$, forța $\vec{F}$ etc.) sunt descrise printr-un număr, direcție, sens și o unitate de măsură asociată. Mărimea (modulul) unui vector se scrie fie prin introducerea simbolului vectorului între două bare verticale: $|\vec{a}|, |\vec{v}|, |\vec{F}|$, fie prin simbolul mărimii fizice fără săgeata de deasupra: a, v, F.
Un vector este caracterizat prin:
- punct de aplicație O;
- modul (mărimea segmentului $OA = a$);
- direcție (dreapta care unește punctele O și A);
- sens (vârful săgeții) 3.



Un corp poate avea simultan proprietăți fizice cărora le sunt asociate ambele tipuri de mărimi fizice. De exemplu, o minge de fotbal aflată în mișcare are și masă (mărime fizică scalară) și viteză (mărime fizică vectorială).
Regula paralelogramului este o metodă de compunere a două mărimi fizice vectoriale asociate aceleiași proprietăți fizice. Dacă se cunosc vectorii $\vec{a}$ și, respectiv, $\vec{b}$ (doi vectori viteză $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$ sau două forțe de tracțiune $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$), compunerea lor se notează $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ și se efectuează astfel: îi translatăm paralel cu ei înșiși





până devin concurenți cu aceeași origine, prin vârful unuia se duce o paralelă la celălalt și apoi se repetă procedeul și pentru al doilea vector. Se obține astfel un paralelogram ale cărui laturi au mărimea și orientarea vectorilor $\vec{a}$ și, respectiv, $\vec{b}$. **4** Vectorul rezultant $\vec{c}$ are originea în originea celor doi vectori, vârful în punctul de intersecție a paralelelor și mărimea egală cu a diagonalei paralelogramului. Dacă direcțiile vectorilor formează între ele unghiul α, mărimea vectorului se determină cu formula:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}\ .$$

Regula poligonului: dacă $\vec{a}$, $\vec{b}$ și $\vec{c}$ sunt trei vectori coplanari, atunci translatăm vectorul $\vec{b}$ (paralel cu el însuși) până ajunge cu originea în vârful vectorului $\vec{a}$, apoi translatăm vectorul $\vec{c}$ până ajunge cu originea în vârful vectorului $\vec{b}$. Vectorul sumă $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ închide poligonul format din vectorii $\vec{a}$, $\vec{b}$ și $\vec{c}$, unind originea primului vector cu vârful ultimului vector, sensul fiind îndreptat spre ultimul vector. **5** Această metodă poate fi generalizată și pentru mai mulți vectori. Prin această metodă grafică se verifică proprietatea de asociativitate a adunării vectorilor, adică:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

Adunarea vectorilor este comutativă:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}\ .$$

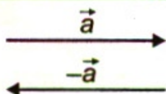
Diferența a doi vectori înseamnă adunarea unui vector cu opusul celuilalt vector:

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})\ .$$

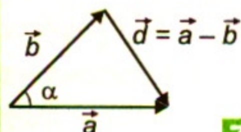
Opusul unui vector este un vector care are același modul, aceeași direcție și sens contrar. **6**

Diferența a doi vectori se obține pe cale grafică prin unirea vârfurilor celor doi vectori, după ce au fost aduși cu originea comună și dând sensul spre vectorul din care se efectuează scăderea **7**:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}\ .$$

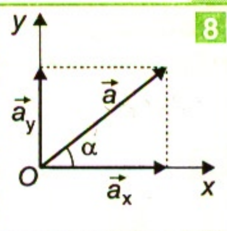


Scăderea vectorilor nu este comutativă.



Descompunerea vectorilor este operația inversă compunerii și constă în determinarea componentelor unui vector dat pe două direcții definite.

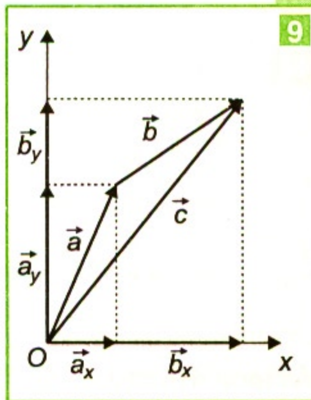
În general, direcțiile se aleg perpendiculare una pe cealaltă, adică un sistem de axe ortogonale.



Un vector oarecare $\vec{a}$ se proiectează pe cele două axe, construind din originea și vârful acestuia perpendiculare la fiecare din cele două axe. Se obțin astfel componentele vectorului pe cele două axe *Ox* și *Oy* 8:

$$\begin{cases} a_x = a\cos\alpha \\ a_y = a\sin\alpha \end{cases};$$

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 \quad \text{și} \quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a_y}{a_x}.$$



În funcție de valoarea unghiului α, format de vectorul $\vec{a}$ cu axa *Ox*, componentele sale pot avea valori pozitive, negative sau nule. Componenta unui vector este nulă față de o axă de coordonate dacă vectorul este orientat perpendicular pe acea axă.

Vectorul sumă a doi vectori $\vec{a}$ și $\vec{b}$ proiectat pe axele de coordonate ale unui sistem ortogonal are componentele c_x și c_y. 9 Cum $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ obținem:

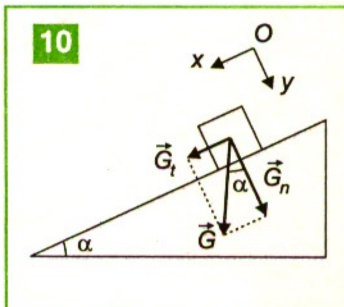
$$\begin{aligned} c_x &= a_x + b_x \\ c_y &= a_y + b_y \end{aligned}.$$

Relația precedentă se poate generaliza și în cazul compunerii mai multor vectori. Proiecția vectorului sumă pe o axă de coordonate reprezintă suma proiecțiilor vectorilor componenți pe aceeași axă.

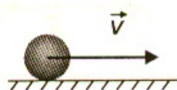
Determinăm cele două componente ale vectorului $\vec{G}$ ducând prin vârful lui paralele la cele două direcții, *Ox* (paralelă cu planul înclinat) și *Oy* (perpendiculară pe planul înclinat), care prin compunere vor avea ca rezultat vectorul $\vec{G}$. Mărimile proiecțiilor vectorului $\vec{G}$ pe două axe sunt:

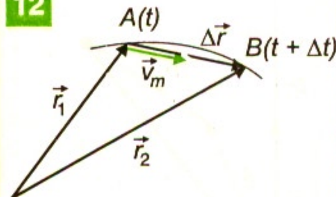
Ox: $G_t = G\sin\alpha$ și *Oy*: $G_n = G\cos\alpha$. 10

Greutatea corpului așezat pe un planul înclinat este descompusă, fără ca efectul total să se schimbe, în două componente: una perpendiculară (normală) pe plan, notată G_n, și una paralelă (tangențială), notată G_t.



Descrierea mișcării corpurilor cu mărimile fizice vectoriale viteză și accelerație





Unui corp în mișcare de translație îi asociem un punct material în mișcare rectilinie, deci reducem reprezentarea poziției acelui corp la poziția unui punct geometric pe o traiectorie rectilinie **11**. Modificarea poziției unui corp în timp constă în analiza pozițiilor lui succesive pe fotografii stroboscopice sau efectuarea mai multor măsurări ale pozițiilor corpului într-un interval de timp.

Vectorul de poziție $\vec{r}$ este folosit pentru localizarea poziției unui obiect; are punctul de aplicație în punctul de referință ales și vârful în poziția obiectului de localizat. Modulul acestui vector este egal cu distanța de la punctul de referință la poziția obiectului și sensul lui este spre obiect.

Dependența vectorului de poziție de timp descrie mișcarea mobilului: $\vec{r} = f(t)$

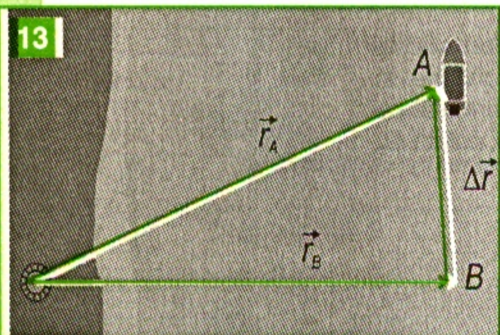
Vectorul deplasare, $\Delta\vec{r}$, reprezintă variația vectorului de poziție:

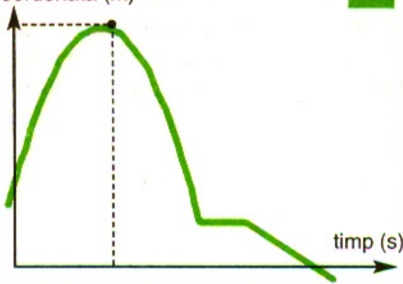
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 .$$

Exemplu: Vectorul (deplasare) $\Delta\vec{r}$ între punctul *A* (la momentul *t*) și punctul *B* (la momentul $t + \Delta t$) este dat de diferența dintre vectorii de poziție corespunzători celor două puncte, $\vec{r}_1$ și, respectiv, $\vec{r}_2$, adică $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ **12**.

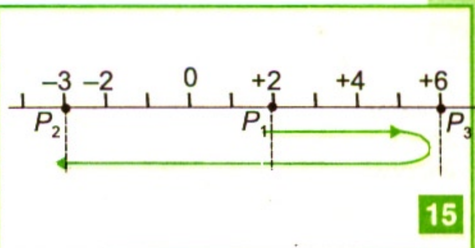
Dacă traiectoria este o curbă închisă, punctul inițial coincide cu punctul final și astfel vectorul deplasare este zero, dar mobilul parcurge o distanță nenulă. De aceea, nu trebuie făcută confuzie între vectorul deplasare ca diferență vectorială între vectorii de poziție și distanță ca spațiu total parcurs de mobil.

De pe ecranul unui radar putem afla vectorii de poziție ai unui mobil (avion, vapor etc.) la diferite momente de timp și vectorii deplasare între aceste poziții. **13** În cursul deplasării, vectorul de poziție urmărește mobilul respectiv. Dacă intervalul de timp Δt este foarte mic, atunci vectorii deplasare devin tangenți la traiectoria mobilului și o aproximează din ce în ce mai bine. Distanța parcursă este mai mare decât deplasarea





când mișcarea nu este rectilinie sau este rectilinie și prezintă puncte de întoarcere. Dacă mobilul se mișcă rectiliniu, atașăm pe direcția de mișcare un punct origine *O* și un sens pozitiv. Obținem în acest mod o axă de coordonate *Ox*.



Coordonata *x* a corpului este distanța de la orgine la mobil. Aceasta poate fi pozitivă sau negativă, după cum mobilul se află față de originea axei pe sensul pozitiv sau pe sensul negativ.

Putem reprezenta grafic valorile momentelor de timp pe axa orizontală și valorile coordonatelor pe axa verticală **14** Se obține astfel dependența coordonatei de timp.

Pentru a citi poziția corpului în mișcare la un moment din intervalul reprezentat pe grafic:

- se identifică momentul specificat pe axa timpului (axa orizontală);
- se trasează o linie verticală prin acest punct până când aceasta intersectează graficul;
- din punctul de intersecție obținut se trasează o linie orizontală până în punctul de intersecție cu axa verticală și găsim coordonata corespunzătoare corpului;
- porțiunile crescătoare ale graficului corespund deplasării corpului în sensul pozitiv al axei, porțiunile descrescătoare ale graficului corespund deplasării corpului în sensul negativ al axei, iar porțiunile orizontale ale graficului corespund staționării corpului.

Deplasarea unui corp pe o traiectorie rectilinie este dată de relația: $\Delta x = x - x_0$, unde x este coordonata la momentul t, iar x_0 este coordonata la momentul inițial t_0.

Când corpul se deplasează invers față de sensul axei coordonatelor, deplasarea este negativă și egală în modul cu distanța parcursă. Când corpul se deplasează atât în sensul axei coordonatelor, cât și în sens contrar, deplasarea este mai mică în modul decât distanța parcursă.

Deplasarea Δx reprezintă variația coordonatei unui punct material între două puncte P_1 și P_2 de pe axa de referință **15** :

$\Delta x = x_2 - x_1 = -3 - 2 = -5$ m. De reținut că distanța și deplasarea nu sunt egale, deoarece mișcarea prezintă puncte de întoarcere, iar distanța parcursă este mai mare decât deplasarea înregistrată. Distanța $d = \Delta s$ reprezintă lungimea efectiv parcursă pe traiectorie de la P_1 la P_3 și de la P_3 la P_2:

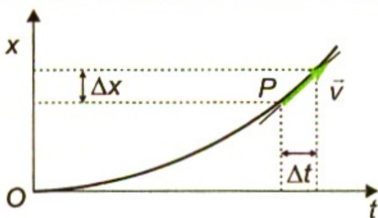
$\Delta s = 4 + 9 = 13$ m.

Mișcările unui punct material se clasifică după forma traiectoriei (rectilinie sau curbilinie) și după modul în care mărimea vitezei punctului material considerat depinde de timp (mișcări uniforme, uniform variate, variate).

Vectorul viteză medie al unui corp caracterizează mișcarea acestuia în intervale de timp și este egal cu raportul dintre vectorul deplasare $\Delta\vec{r}$ între două puncte de pe traiectorie și intervalul de timp Δt necesar deplasării corpului între aceste puncte:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{t - t_0} \quad .$$

Vectorul viteză medie are aceeași direcție și sens cu vectorul deplasare. El are direcția secantei la traiectorie **12**



Vectorul viteză se introduce cu scopul de a compara mișcările mecanice între ele.

Viteza medie nu ia în considerare modul de mișcare în intervalul de timp considerat, neglijând astfel distanța parcursă și eventualele variații de viteză de pe parcurs. De aceea, întâlnim și termenul de medie orară pentru a desemna viteza medie. Viteza medie se calculează considerând deplasarea între începutul și sfârșitul mișcării, în timp ce viteza în modul medie consideră distanța parcursă între aceste momente.

Vectorul viteză instantanee sau **momentană** a unui obiect se definește pentru intervale de timp foarte mici. Pe parcursul deplasării, mobilul analizat poate să se deplaseze mai repede sau mai încet, adică viteza acestuia variază. În cazul unei mașini, viteza instantanee este tot timpul redată de vitezometrul de la bordul mașinii.

Viteza momentană a mobilului, într-un punct P cu coordonata x pe traiectoria sa, la un moment de timp t este egală cu raportul dintre deplasarea mică Δx considerată pentru intervalul de timp Δt foarte mic și valoarea acestui interval de timp. Deplasarea Δx (între momentul t și momentul $t+\Delta t$) devine tangentă în punctul respectiv la traiectoria mobilului, dacă durata Δt este foarte mică. 16

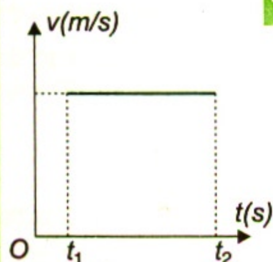
Vectorul viteză este tangent la traiectorie în fiecare punct al acesteia și orientarea lui indică sensul mișcării mobilului.

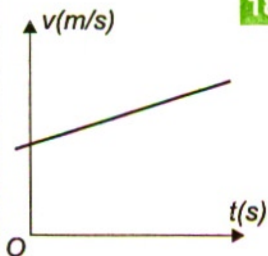
Un caz particular îl constituie mișcarea rectilinie și uniformă, în care modulul vitezei este constant, iar traiectoria este o dreaptă. 17

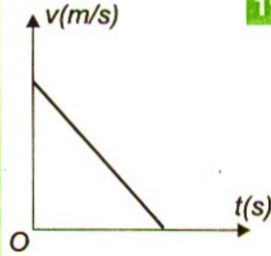
În cazul mișcării rectilinii uniform variate, viteza depinde liniar de timp. Ea crește în cazul mișcării accelerate 18 și scade în cazul mișcării frânate. 19

Dacă viteza instantanee are componente pe două axe perpendiculare, mișcarea unui mobil care se deplasează într-un plan este compusă din două mișcări de-a lungul celor două axe. Unitatea de măsură a vitezei $[v]_{SI} = \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

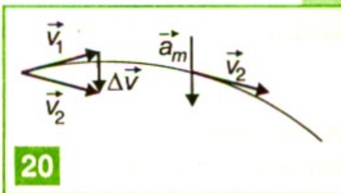
În practică, viteza se exprimă adeseori și în km/h $\left(1\text{km/h} = \frac{1000\,\text{m}}{3600\,\text{s}} = \frac{1}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$.







Vectorul accelerație medie măsoară raportul dintre variația vectorului viteză al mobilului $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$, și intervalul de timp corespunzător, $\Delta t = t - t_0$:



$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0}.$$

Unitatea de măsură a accelerației este: $[a]_{SI} = \frac{m}{s^2}$.

Vectorul accelerație se introduce pentru a putea compara neuniformitățile mișcărilor între ele. Vectorul accelerație medie are aceeași direcție și același sens cu variația vectorului viteză, deci este îndreptat spre partea concavă a traiectoriei. 20

Orice vector accelerație are două componente:

– o componentă tangențială $\vec{a}_t$, care apare datorită modificării modulului vectorului viteză;

– o componentă normală $\vec{a}_n$, care apare datorită modificării direcției și sensului vectorului viteză. Astfel:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n.$$

Accelerația instantanee sau **momentană** se obține considerând intervale de timp foarte mici.

Exemple:

1. Dacă accelerația este nulă, mobilul are o mișcare rectilinie și uniformă, deoarece vectorul viteză nu variază $\vec{a} = 0 \Rightarrow \Delta\vec{v} = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v} = ct$.
2. Dacă vectorul accelerație este constant, mobilul are o mișcare rectilinie uniform variată, care poate fi accelerată sau încetinită. În acest caz, accelerația instantanee a unei mișcări uniform variate este egală cu accelerația medie: $a = a_m$.

Observație: Vectorul accelerație se definește ca fiind raportul dintre variația vectorului viteză și intervalul de timp corespunzător și nu raportul dintre vectorul viteză și timp. De exemplu, în mișcarea rectilinie și uniformă, există vector viteză, dar nu există vector accelerație (mai exact, $\vec{a} = 0$).

Compunerea mișcărilor mecanice

Un sistem de referință care se mișcă față de Pământ se numește sistem mobil.
Un corp aflat în sistemul mobil are față de Pământ o mișcare compusă din mișcarea corpului față de sistemul mobil și mișcarea sistemului mobil față de Pământ.
Facem următoarele notații:

$\vec{v}$ – viteza mobilului față de Pământ.

$\vec{v}_r$ – viteza relativă a mobilului față de sistemul mobil;

$\vec{v}_t$ – viteza de transport a sistemului mobil față de sistemul Pământ.

Relația **vectorială de compunere a vitezelor** este:

$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_t$$

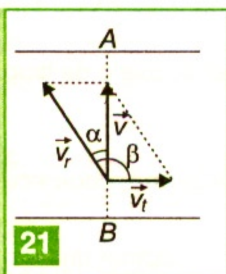
În practică se întâlnește și noțiunea de viteză relativă a unui corp față de alt corp. De exemplu, o mașină se mișcă cu o viteză relativă față de altă mașină. Prin definiție vectorul viteză relativă al unui corp față de alt corp este diferența vectorială a vectorilor viteză. Din acestă cauză este mai puțin periculoasă o ciocnire a două mașini care se mișcă în același sens, față de cazul în care mașinile se ciocnesc frontal.

Exemplu numeric: Dacă mașinile se mișcă cu 36 km/h și 64 km/h când se ciocnesc în același sens viteza relativă a uneia față de cealaltă este v_r = 28 km/h, în timp ce, dacă se ciocnesc frontal, v_r = 100 km/h.

Probleme rezolvate

1. Un vâslaș care se mișcă cu viteza *u* față de râul ce curge cu viteza *v* dorește să traverseze râul pe drumul cel mai scurt. Cum trebuie el să orienteze barca pentru a ajunge pe malul opus în direcția dorită ?

Rezolvare



Deoarece vâslașul dorește să traverseze râul pe drumul cel mai scurt, barca trebuie să se deplaseze perpendicular pe mal. Deci viteza trebuie să fie orientată pe direcția *AB*. **21**

Râul curge cu viteza v_t, care este viteză de transport. Din desen observăm că vâslașul orientează barca oblic față de direcția de curgere a râului. Notăm cu α unghiul format de vectorii v_r și *v*. Obținem:

$$\sin\alpha = \frac{v_t}{v_r}.$$

2. În cât timp este ridicat de o scară rulantă un om care stă pe ea, știind că la aceeași viteză relativă față de scară, omul urcă scara nemișcată în timpul t_1 = 160 s, iar pe scara mobilă în timpul t_2 = 40 s.

Rezolvare

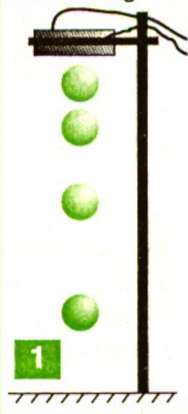
Notăm cu:
d – distanța parcursă de scară în situația în care omul stă pe ea;
u – viteza omului față de scară (viteza relativă);
v_t – viteza scării față de sol (viteza de transport).
Timpul în care este ridicat de scara rulantă dacă omul stă pe ea este $t = d/v_t$, deoarece scara se mișcă cu viteza *v*.
Timpul în care urcă omul scara nemișcată este $t_1 = d/u$, deoarece față de scară omul urcă cu viteza *u*.
Timpul în care omul este ridicat de scara mobilă când omul urcă pe scară este $t_2=d/v$, unde $\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}_t$.

Deoarece *u* și v_t au același sens,

$$v = u + v_t \Rightarrow t_2 = d/(u + v_t) \Rightarrow v_t = d/t_2 - u \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d/t = d/t_2 - d/t_1 \Rightarrow d = t_1 t_2 (t_1 - t_2) = 53{,}3\ \text{s}$$

TESTE

La următoarele afirmații răspundeți cu A dacă afirmația respectivă este adevărată sau cu F dacă este falsă

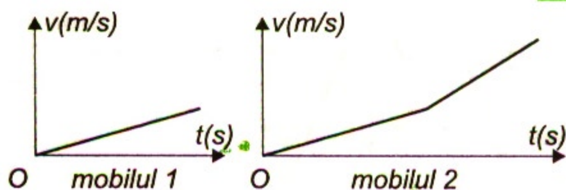


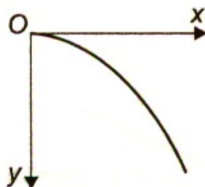
1. A F. Mobilul din figura 1 are o mișcare accelerată.
2. A F. Un corp poate fi considerat punct material într-o situație și nu poate fi considerat punct material în alte situații.
3. A F. Dacă un corp nu-și modifică poziția față de alte corpuri, el se află în repaus față de acestea.
4. A F. Viteza mobilului este orientată tangent la traiectorie.
5. A F. Accelerația mobilului este orientată tangent la traiectorie.
6. A F. Viteza medie a unui mobil reprezintă distanța parcursă.
7. A F. Ambele corpuri din figurile 2 au mișcări rectilinii uniforme.
8. A F. Mobilul al doilea își schimbă la un anumit moment viteza. 2
9. A F. Accelerația se definește ca fiind raportul dintre viteză și timp.
10. A F. Accelerația se măsoară în m/s^2.
11. A F. Un mobil poate avea o o accelerație spre vest și o viteză în același moment spre nord.

Probleme

1. Un om aflat într-un tren ce se mișcă cu viteză constantă lasă să cadă o monedă. Traiectoria monedei va fi o curbă ca în figura 3 pentru:
   a) omul din tren;
   b) un om de pe sol;
   c) un om din alt tren ce se mișcă în același sens cu primul tren și cu aceeași viteză;
   d) un om din alt tren ce se mișcă în același sens cu primul cu viteză mai mare.

2. Un lift are o viteză îndreptată în sus și o accelerație îndreptată în jos. Mișcarea liftului este o mișcare:
   a) accelerată în sus;
   b) accelerată în jos;
   c) frânată în jos;
   d) frânată în sus.





3. Mişcarea unui mobil este descrisă de graficul din figura 4. Viteza medie în intervalul $t_1 = 2$ s şi $t_2 = 6$ s este:

a) 2 m/s; c) 6 m/s;
b) 4 m/s; d) 10 m/s.

4. Un mobil parcurge prima jumătate a drumului său total cu viteza v_1 = 7,2 km/h, iar cealaltă jumătate cu viteza v_2 = 8 m/s. Care din valorile de mai jos reprezintă viteza medie cu care s-a deplasat mobilul pe întreaga distanţă ?

a) 5 m/s; c) 4,8 m/s;
b) 3,2 m/s; d) 2,6 m/s.

5. Viteza de mişcare a unui mobil de la $t = 0$ s la $t = 7$ s variază după legea descrisă de graficul din figura 5. Să se afle:

a) viteza medie în intervalul (0 s; 4 s);
b) viteza medie în intervalul (0 s; 6 s);
c) intervalul de timp în care acceleraţia are modulul maxim.

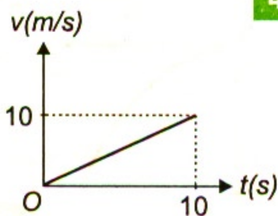
6. Un barcagiu vâsleşte perpendicular către ţărm cu o viteză v_0 = 3,6 km/h faţă de apă. Cursul apei deplasează barca cu o distanţă d = 300 m în josul râului. Lăţimea râului este L = 100 m. Care este viteza râului şi durata traversării lui ?

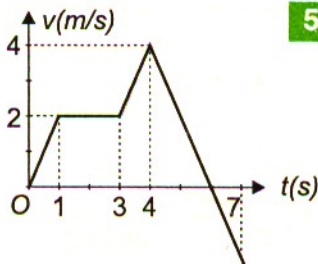
7. O scară rulantă ridică un călător, aflat în repaus pe scară, în timpul $t_1 = 20$ s. Pe scara imobilă călătorul urcă în timpul $t_2 = 40$ s. În cât timp t urcă călătorul pe scara mobilă ?

8. Viteza unei şalupe în sensul curgerii râului este v_1 = 25 km/h, iar în sensul opus v_2 = 12 km/h. Care este viteza apei şi viteza şalupei faţă de apă ?

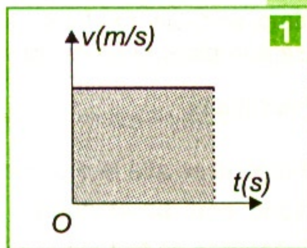
9. Un avion parcurge distanţa d = 200 km dus şi întors cu viteza v_0 = 300 m/s faţă de aer. Cât timp durează zborul dacă vântul suflă cu viteza v = 20 m/s:

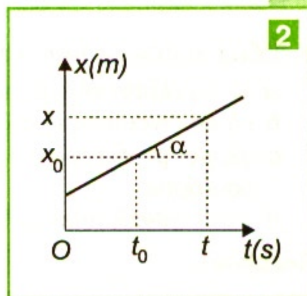
a) perpendicular pe direcţia parcursă;
b) de-a lungul direcţiei parcurse;
c) când nu suflă vântul.





Mișcarea rectilinie uniformă a punctului material** (facultativ)





Dacă vectorul viteză al unui punct material este constant $\vec{v} = const.$, adică vectorul viteză nu își schimbă nici mărimea (v = const.), nici orientarea, atunci punctul material are o mișcare rectilinie uniformă. Traiectoria este dreaptă și mărimea vitezei medii coincide cu mărimea vitezei momentane pentru toate intervalele de timp; în acest caz, modulul vectorului deplasare este egal cu distanța efectiv parcursă de corpul considerat:

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = d = x - x_0 .$$

Din expresia vitezei medii $v_m = v = \dfrac{x - x_0}{t - t_0}$,

obținem legea de mișcare pentru mișcările rectilinii și uniforme:

$$\boxed{x = x_0 + v\,(t - t_0).}$$

Originea x_0 a coordonatelor și originea t_0 a timpului pot fi alese arbitrar (cazul particular $t_0 = 0$ corespunde cronometrării din momentul în care începe studiul mișcării).

În acest caz, legea mișcării devine:

$$x = x_0 + v\,t,$$

unde $x - x_0 = d = v\,t$, este distanța efectiv parcursă de mobilul considerat și este numeric egală cu aria hașurată în figura 1.

Reprezentarea grafică $x = f(t)$ se face printr-un segment de dreaptă 2. Panta reprezentării grafice (tangenta unghiului α făcut de grafic cu abscisa) este numeric egală cu mărimea vitezei mobilului:

$$tg\alpha = \frac{x - x_0}{t - t_0} = v .$$

Cu cât panta este mai mare, cu atât viteza mobilului este mai mare. Dacă $v > 0$, mobilul se deplasează în sensul pozitiv al axei de coordonate, iar dacă $v < 0$, acesta se deplasează în sensul negativ al axei de coordonate.

Șirurile de puncte care marchează pozițiile de pe traiectorie ale punctelor materiale care se mișcă rectiliniu cu viteze diferite, sunt aliniate pe diferite segmente de dreaptă. Dacă mobilele parcurg spații egale în intervale de timp egale, atunci acestea se mișcă rectiliniu și uniform.

Mișcarea uniformă poate reprezenta mișcarea echivalentă a unui mobil care se mișcă variat, dar care străbate același spațiu în același timp efectiv de mișcare.

Probleme rezolvate

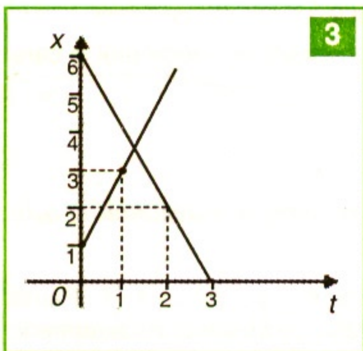
1. Un elev vede lumina emisă de un fulger și după $\Delta t = 3$ s aude tunetul. La ce distanță a fulgerat dacă sunetul se propagă cu viteza $v = 340$ m/s? Dacă după un timp, vede un nou fulger și aude tunetul după 5 s, poate preciza dacă centrul furtunii se apropie sau se depărtează?

Rezolvare

Fulgerul se află la o distanță $d = v\,\Delta t = 1020$ m de locul unde se află elevul. Dacă aude noul tunet după 5 s de la vederea noului fulger, $d_1 = 1700$ m, ceea ce înseamnă că furtuna s-a îndepărtat.

2. Două mobile se mișcă rectiliniu și uniform, după legile $x_1 = 1 + 2t$ și $x_2 = 6 - 2t$.
   a. să se reprezinte, pe același grafic, legile de mișcare;
   b. să se calculeze la ce moment de timp se întâlnesc corpurile;
   c. să se precizeze ce semnifică intersecția legilor de mișcare cu axele de coordonate;
   d. cu ce viteză relativă trece un corp pe lângă celălalt.

Rezolvare



a. Grafic 3 .

b. Pentru ca cele două mobile să se întâlnească impunem condiția de egalitate a coordonatelor $x_1 = x_2$; $1 + 2t = 6 - 2t \Rightarrow 1{,}25$ s.

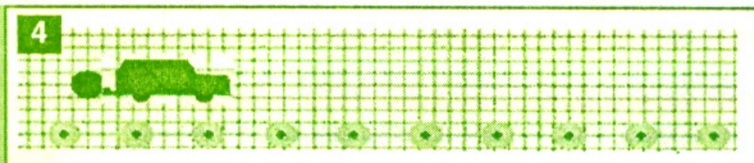
c. Intersecția unei legi de coordonate cu axa Ox, reprezintă fizic coordonata la momentul inițial: $x_{01} = 1$ m și $x_{02} = 6$ m, în timp ce intersecția cu axa timpului precizează la ce moment de timp mobilul trece prin originea axei Ox. Al doilea mobil trece prin originea axei Ox după $t_2 = 3$ s.

d. Viteza relativă a primului mobil față de celălalt este: $v_{r12} = v_1 - v_2$. Cum $v_1 = 2$ m/s și $v_2 = -2$ m/s, înseamnă că $v_{r12} = 4$ m/s.

TESTE

La următoarele afirmații răspundeți cu A dacă afirmația respectivă este adevărată sau cu F dacă este falsă.

1. A F. Mișcarea mobilului descrisă în desenul 4 este rectilinie și uniformă.



2. A F. Când un corpul se află în mișcare fără accelerație el se mișcă rectiliniu și uniform.

3. A F. În mișcarea rectilinie și uniformă traiectoria mobilului este o dreaptă.

4. A F. În mișcarea rectilinie și uniformă mobilul are viteza pozitivă.

5. A F. În mișcarea rectilinie și uniformă mobilul descrie spații egale în intervale de timp egale.

6. A F. În mișcarea rectilinie și uniformă viteza mobilului crește direct proporțional cu timpul.

7. A F. Viteza medie în mișcarea rectilinie și uniformă a mobilul este egală cu viteza momentană.

Probleme

1. Din două orașe A și B aflate la distanțele $d = 100$ km pornesc unul spre celălalt simultan, două autoturisme, care se mișcă cu vitezele $v_1 = 60$ km/h și respectiv $v_2 = 90$ km/h. Primul mobil pornește din orașul A. Distanța la care se întâlnesc de orașul A este:

a) 60 km; c) 50 km;
b) 40 km; d) 80 km.

2. Un autoturism s-a deplasat în oraș pe distanța $d = 54{,}26$ cm în intervalul de timp $\Delta t = 1/50$ s, fiind detectat cu radarul. Care este viteza autoturismului ?

a) 35,6 km/h; c) 75,7 km/h;
b) 50 km/h; d) 97,7 km/h.

3. Un mobil se mișcă uniform din punctul A spre punctul B, $AB = 20$ m, cu viteza $v_1 = 3$ m/s. Din B, perpendicular pe direcția AB, se mișcă uniform un al doilea mobil cu $v_2 = 2$ m/s. Distanța dintre cele două mobile după $t = 2$ s de la începerea mișcării, dacă mobilele pornesc concomitent, este:

a) 6,32 m; c) 14,56 m;
b) 10 m; d) 18 m.

4. Două trenuri de lungimi l_1 și l_2 se deplasează pe două linii paralele cu vitezele v_1 și respectiv v_2 în același sens. Cât timp durează trecerea unui tren prin dreptul celuilalt ?

5. Mișcările rectilinii a două mobile sunt descrise de legile de mișcare $x_1 = 3t$ și $x_2 = 10 - 2t$. Mobilele pornesc simultan la momentul $t_0 = 0$s.

a) reprezentați grafic în coordonate (x, t), legile de mișcare ale mobilelor;
b) determinați timpul după care se întâlnesc mobilele și locul unde se întâlnesc;
c) viteza cu care trec mobilele unul pe lângă celălalt în momentul întâlnirii;
d) determinați distanța dintre mobile după $t = 10$ s de la începerea mișcărilor.

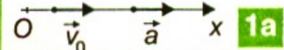
2.1.2 Mișcarea rectilinie uniform variată a punctului material** (facultativ)

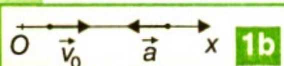
Mișcarea rectilinie uniform variată este caracterizată de vectorul accelerație constant în timp ($\vec{a}$ = const.). În mișcarea rectilinie uniformă variată, vectorul accelerație are numai componentă tangențială, deoarece numai modulul vitezei se modifică, direcția și sensul rămânând neschimbate. Alegem axa de coordonate *Ox* pe direcția în care se mișcă mobilul și alegem sensul axei în sensul vitezei inițiale a mobilului v_0. Atunci accelerația este pozitivă la o mișcare accelerată **1a** sau negativă la o mișcare încetinită **1b**. În mișcările de coborâre pe un plan înclinat a unei bile sau de cădere liberă în câmp gravitațional, fotografiate stroboscopic, se observă că în intervale de timp egale sunt străbătute de spații inegale **2**. Din definiția accelerației medii (care este egală cu accelerația momentană, în acest caz):

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0},$$

obținem **legea vectorială a vitezei:** $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}(t - t_0)$.

Considerăm cazul particular $t_0 = 0$ (momentul în care începem cronometrarea mișcării). Proiectând relația vectorială pe axa de coordonate, obținem o relație scalară pentru **legea vitezei**:



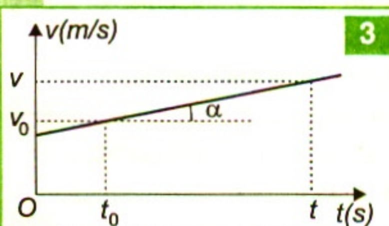


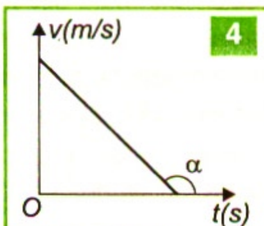
$v = v_0 + a(t-t_0)$, unde:
v_0 – viteza inițială,
a – accelerația mișcării,
t – timpul efectiv de mișcare,
v – viteza după timpul t de mișcare,
t_0 – momentul inițial de timp.



Dacă $t_0 = 0$, legea vitezei devine: $v = v_0 + at$.
Această funcție de gradul întâi are graficul liniar, în coordonate v și t.
Dacă accelerația este pozitivă, viteza crește odată cu trecerea timpului, iar dacă accelerația este negativă, viteza scade odată cu creșterea timpului. O mașină care frânează se mișcă uniform variat, cu accelerația negativă.

Dacă panta dreptei $\text{tg}\alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a > 0$, atunci mișcarea este uniform accelerată **3**. Dacă panta dreptei $\text{tg}\alpha = \frac{\Delta v}{\Delta t} = a < 0$, atunci mișcarea este uniform încetinită **4**. Caracterul accelerat sau frânat al mișcării depinde în mod esențial de sensul vitezei corpului. În mișcarea accelerată, accelerația și viteza au aceleași semn, $a > 0$, $v > 0$ sau $a < 0$, $v < 0$, iar în mișcarea frânată ele au





semne opuse $a > 0$ și $v < 0$, sau $a < 0$ și $v > 0$. Deci numai semnul accelerației nu este suficient să precizăm caracterul mișcării.
Exemplu: dacă vectorul accelerație al unui lift este îndreptat în jos, liftul poate coborî accelerat sau poate urca frânat.

Considerăm expresia deplasării $\Delta x = d = \frac{v_0 + v}{2}\Delta t$ în intervalul de timp $\Delta t = t - t_0$.

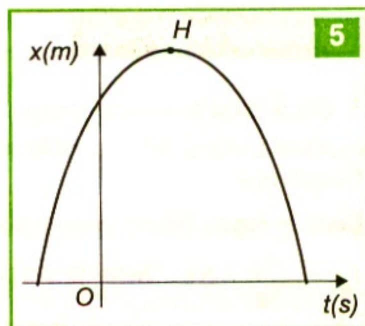
Înlocuim expresia vitezei $v = v_0 + a \cdot \Delta t$ în Δx și obținem **legea de mișcare** în mișcarea rectilinie uniform variată:

$$d = \Delta x = x - x_0 = \frac{v_0 + v_0 + a \cdot \Delta t}{2} \cdot \Delta t = v_0\, \Delta t + \frac{a}{2}\Delta t^2, \text{ obținem:}$$

$$x = x_0 + v_0 (t - t_0) + \frac{a}{2}(t - t_0)^2, \text{ unde:}$$

x – coordonata la momentul de timp t;
v_0 – viteza inițială;
a – accelerația;
t_0 – momentul inițial.

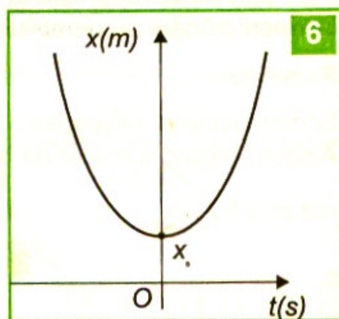
Considerând $t_0 = 0$, obținem: $x = x_0 + v_0 t + \frac{a}{2}t^2$



Coordonatele la diferite momente de timp t sunt date de funcția $x(t)$, care este o funcție de gradul doi. Curba descrisă de legea de mișcare (dependența de timp) pentru mișcarea uniform variată poartă numele de parabolă. Considerăm viteza inițială $v_0 > 0$. Dacă accelerația este negativă ($a < 0$), ca la aruncarea unui corp pe verticală, atunci parabola admite maxim și are profil convex („nu ține apa") **5**.
Coordonatele vârfului H, al parabolei se determină cu relațiile:

$$t_v = -\frac{v_0}{a}; \qquad x_v = x_0 - \frac{v_0^2}{2a}.$$

Vârful parabolei din graficul coordonatei în funcție de timp coincide cu punctul în care corpul are viteză nulă.
Dacă accelerația este pozitivă ($a > 0$), atunci parabola admite un minim. **6**



Dacă accelerația este zero, atunci coordonatele la diferite momente de timp t sunt date de funcția $x(t)$, de gradul întâi, deci regăsim mișcarea rectilinie și uniformă ca un caz particular.
Aria cuprinsă între graficul vitezei pentru mișcarea uniform variată a unui corp, axa timpului și cele două ordonate duse prin extremitățile intervalului de timp este numeric egală cu deplasarea $d = \Delta x$ în intervalul de timp considerat (vezi în figura **3** aria unui trapez pentru intervalul de timp $\Delta t = t - t_0$):

$$d = \text{Aria trapezului} = \frac{v + v_0}{2} \cdot (t - t_0) = v_{medie} \cdot \Delta t, \text{ unde } v_{medie} = \frac{v + v_0}{2}$$

este media aritmetică între v_0 – viteza inițială (la momentul $t_0 = 0$) și v – viteza ulterioară (la momentul t). Înlocuind v cu legea vitezei $v = v_0 + a(t - t_0)$ și d cu $d = x - x_0$, regăsim ecuația coordonatei (legea de mișcare).

Ecuația lui Galilei

Considerăm cele două expresii matematice, ale legii vitezei și legii de mișcare:

$$\begin{cases} v = v_0 + a\Delta t \\ \Delta x = v_0\Delta t + \frac{a}{2}\Delta t^2 \end{cases}$$

Substituim expresia intervalului de timp $\Delta t = \frac{v - v_0}{a}$ în legea de mișcare și obținem **ecuația lui Galilei:** $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$.

Probleme rezolvate

1. Dacă mișcarea unui corp cu viteza v_0=10 m/s și accelerația a = –2 m/s^2 este încetinită, după cât timp și la ce distanță se oprește corpul?

Rezolvare

Dacă în legea vitezei punem condiția $v = 0$, obținem după cât timp se oprește corpul: $t_{op} = -\frac{v_0}{a} = 5\,\text{s}$. Distanța corpului în acel moment se obține din legea coordonatei:

$$x_{oprire} = v_0 \cdot \left(-\frac{v_0}{a}\right) + \frac{a}{2} \cdot \left(-\frac{v_0}{a}\right)^2 = -\frac{v_0}{2a} = 25\,\text{m}.$$

2. Un automobil (1) se mișcă uniform cu viteza v_1 = 6 m/s. În spatele lui ajunge un alt automobil (2) la o distanță d cu viteza v_2 = 16 m/s. Pentru a evita o coliziune, automobilul (2) începe să frâneze cu accelerația a = 1 m/s^2.
Care este timpul scurs până la ajungerea automobilelor bară la bară (din momentul începerii frânării automobilului (2), și care este valoarea distanței d?

Rezolvare

Scriem ecuațiile mișcărilor:
Alegem origine a axelor de coordonate punctul unde se află automobilul (2).

$$\begin{cases} x_1 = d + v_1 t \\ x_2 = v_2 t - \frac{a \cdot t^2}{2} \end{cases}.$$

Impunem condiția de întâlnire $x_1 = x_2$ și obținem:

$at^2 - 2(v_2 - v_1)t + 2d = 0$, cu soluțiile $t_{1/2} = \frac{(v_2 - v_1) \pm \sqrt{(v_2 - v_1)^2 - 2ad}}{a}$.

Din condiția impusă automobilelor să se întâlnească o singură dată $t_1 = t_2$, obținem:

$$(v_2 - v_1)^2 - 2ad = 0.$$

$$\text{Rezultă: } d = \frac{(v_2 - v_1)}{2a} = 50\,\text{m}.$$

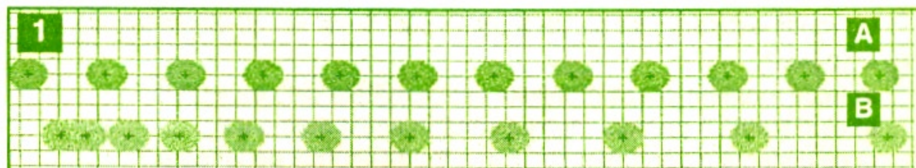
Timpul până la întâlnirea bară la bară este:

$$t = \frac{v_2 - v_1}{a} = 10\ \text{s}.$$

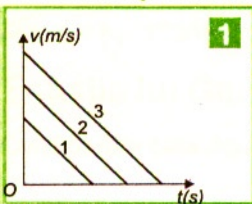
TESTE

La următoarele afirmații răspundeți cu A dacă afirmația respectivă este adevărată sau cu F dacă este falsă:

1. A F. Dacă de pe puntea unui vapor care se deplasează cu viteză constantă se trage un obuz vertical în sus, acesta va cădea pe vapor în același loc.
2. A F. Dacă de la aceeași înălțime se lansează concomitent două corpuri, dintre care unul orizontal, altul se lasă să cadă liber, ele vor ajunge la sol concomitent.
3. A F. După lansarea de la sol, vertical în sus a unui corp punctiform, acesta revine la sol cu aceeași viteză, dacă se neglijează frecarea cu aerul.
4. A F. În mișcarea rectilinie uniform variată a punctului material, accelerația instantanee coincide cu accelerația medie.
5. A F. Dacă viteza mobilului este îndreptată spre stânga și accelerația spre dreapta, corpul are o mișcare încetinită.
6. A F. Dacă o mașină se află în mișcare, pentru a putea preciza dacă ea accelerează trebuie să cunoaștem sensul accelerației și sensul vitezei.
7. A F. Aria cuprinsă între curba accelerației, axa timpului și cele două ordonate duse prin extremități reprezintă spațiul parcurs.
8. A F. Panta dreptei în reprezentarea grafică a vitezei în funcție de timp este viteza mobilului.
9. A F. În figura 1 mobilul A execută o mișcare rectilinie și uniformă, în timp ce mobilul B, are o mișcare accelerată.
10. A F. Pentru un om aflat pe sol, un obiect aruncat dintr-un avion are o traiectorie parabolică.
11. A F. Pentru un om aflat în avion, un obiect aruncat din avion are o traiectorie rectilinie.
12. A F. Pentru un om aflat în avion, un obiect aruncat din avion are o mișcare accelerată cu accelerația g și fără viteză inițială, numită cădere liberă.
13. A F. Dacă două mobile coboară unul pe verticală și celălalt pe un plan înclinat, fără frecare, coboară mai repede cel de pe planul înclinat.



Probleme



1. Trei mobile descriu mișcări ale căror viteze depind de timp conform graficelor 1. Care afirmație este adevarată ?
   a. mobilele pornesc cu aceeași viteză inițială;
   b. mobilele se opresc la același moment de timp;
   c. mobilele se mișcă cu aceeași accelerație;
   d. mobilele se mișcă uniform.

2. Distanțele parcurse până la oprire se află în relațiile:
   a) $s_1 < s_2 < s_3$; b) $s_1 = s_2 = s_3$; c) $s_2 < s_1 < s_3$; d) $s_3 < s_2 < s_1$.

3. Din același robinet cad succesiv două picături de apă. Cum variază distanța dintre ele, în timp ce picăturile se află în aer ?
   a) crește; b) scade; c) rămâne constantă; d) crește și apoi scade.

4. Un corp cade liber de la înălțimea $h = 20$ m. Spațiul parcurs în ultima secundă de cădere este:
   a) 15 m; b) 10 m; c) 5 m; d) 17,5 m.

5. Legea de mișcare a unui mobil este $x = -2t^2 + 5t + 3$ (m).
Să se determine:
   a. Ecuația vitezei și să se reprezinte grafic;
   b. ce reprezintă fizic intersecțiile curbei vitezei cu axele de coordonate ?
   c. ce reprezintă fizic aria cuprinsă între curba vitezei, axa timpului și axa vitezei ?

6. Un corp cu masa $m = 1$ kg este lansat din originea axelor de coordonate cu viteza inițială $v_0 = 20$ m/s. Corpul are o mișcare rectilinie uniform încetinită cu accelerația $a = 1$ m/s^2. Să se afle:
   a. viteza corpului după trei secunde de la începerea mișcării;
   b. viteza medie a corpului în intervalul $t_1 = 2$ s până la $t_2 = 8$ s;
   c. timpul după care se oprește corpul din momentul lansării;
   d. spațiul parcurs de corp până la oprire.

7. Un corp cu masa $m = 2$ kg are o mișcare pe verticală în sus descrisă de ecuația de mișcare $x = 3t + t^2$. Corpul pornește de pe sol. Se neglijează frecarea cu aerul. Să se afle ($g = 10$ m/s^2):
   a. viteza corpului după 3 s de la începerea mișcării;
   b. forța care acționează asupra corpului;
   c. distanța parcursă în a opta secundă de la lansare.

8. Un mobil se deplasează rectiliniu după legea de mișcare $x = -t^2 + + 20t + 5$ (m), să se afle:
   a. ce mișcare are mobilul ?
   b. accelerația mobilului;
   c. viteza mobilului după 4 s.

9. Un mobil este aruncat pe verticală în sus de pe sol cu viteza inițială $v_0 = 32$ m/s ($g = 10$ m/s^2).
   a) în ce moment viteza mobilului este jumătate din cea inițială ?
   b) ce distanță a parcurs mobilul până în acest moment ?
   c) ce distanță a parcurs mobilul în a treia secundă de lansare ?

Dacă după un timp $\Delta t = 1$ s din momentul lansării primului mobil se lansează pe verticală din același punct un al doilea mobil cu $v_{02} = 40$ m/s. Să se afle:

d) după cât timp se întâlnesc corpurile și la ce înălțime se întâlnesc;

e) care este viteza relativă cu care trec corpurile unul pe lângă celălalt în momentul întâlnirii ?

10. Un corp cade liber de la înălțimea $h = 40$ m. Cunoscându-se valoarea accelerației gravitaționale $g = 10$ m/s^2. Să se afle:

a. timpul de coborâre;

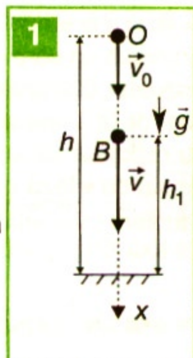
b. viteza cu care atinge corpul solul;

c. spațiul parcurs în ultima secundă de cădere.

Mișcările punctului material în câmp gravitațional** (pentru curioși și performeri) 2.1.3

1. Aruncarea pe verticală de sus în jos

La momentul $t = 0$, lansăm de la înălțimea h, pe verticală de sus în jos, un corp cu o viteză v_0. Corpul va avea o mișcare uniform accelerată cu accelerația gravitațională g, atingând viteza v la înălțimea h_1, 1 :



$$v = v_0 + gt,$$

$$(h - h_1) = x = v_0 t + \frac{gt^2}{2},$$

$$v^2 = v_0^2 + 2g(h - h_1)$$

Dacă $v_0 = 0$, corpul cade liber, deci mișcarea este uniform accelerată fără viteză inițială (se numește cădere liberă):

$$v = g \cdot t,$$

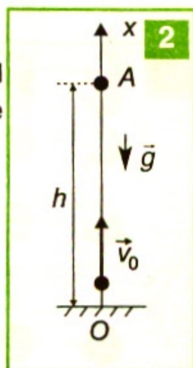
$$x = \frac{gt^2}{2}.$$

$$v = \sqrt{2g(h - h_1)}$$

Când corpul cade liber de la înălțimea h, el ajunge la sol cu $v = \sqrt{2gh}$, într-un timp $t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, relații care se obțin pentru $h_1 = 0$.

2. Aruncarea pe verticală de jos în sus

Un corp este aruncat vertical în sus, cu viteza inițială v_0, de la nivelul solului. Corpul are o mișcare rectilinie uniform încetinită, deoarece viteza și accelerația au sensuri contrare 2 :



$$v = v_0 - gt,$$

$$x = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}.$$

În urcare, viteza corpului scade de la valoarea v_0 (la $t_0 = 0$) până ajunge la valoarea $v = 0$, după un timp de urcare:

$$t_u = \frac{v_0}{g}$$

Din legea lui Galilei, $v^2 = v_0^2 - 2gh$, pentru $v = 0$ corpul atinge înălțimea maximă:

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Viteza corpului își schimbă sensul la momentul $t = t_u$ și în cădere liberă viteza crește. După intervalul de timp numit timp de coborâre

$t_c = \frac{v_0}{g} = t_u$, corpul atinge nivelul solului cu aceeași viteză cu care a plecat inițial;

$v = \sqrt{2gh_{max}} = v_0$, după un timp total de mișcare $t_{total} = t_u + t_c = 2t_u = 2\frac{v_0}{g}$.

3. Aruncarea pe orizontală

Aruncăm un corp de la o înălțime h față de nivelul solului cu viteza orientată într-un plan orizontal. Observăm că, dacă simultan cu această aruncare lăsăm un alt corp să cadă liber de la aceeași înălțime, cele două corpuri vor ajunge simultan pe Pământ. Analiza cu mijloace stroboscopice arată că tot timpul corpurile sunt la același nivel. Corpul lansat cu viteză orizontală descrie față de Pământ o traiectorie parabolică. 3a

Studiem mișcarea corpului pe două direcții, Ox și Oy:

Pe axa Ox: $F_x = 0$, $a_x = 0$, corpul are o mișcare rectilinie uniformă:

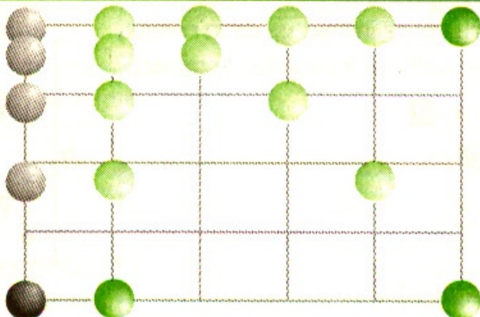
$$v_x = v_0 = \text{const},\ x = v_0 t;$$

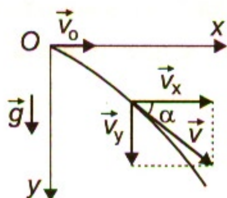
Pe axa Oy: corpul cade liber sub acțiunea propriei greutăți:

$$v_y = gt,\ y = \frac{gt^2}{2};$$

Substituind timpul, obținut din ecuația de mișcare pe axa Ox, în ecuația de mișcare pe axa Oy, obținem ecuația traiectoriei:

$$y = \frac{g \cdot x^2}{2v_0^2},$$





deoarece y este o funcție de gradul doi, traiectoria corpului este o parabolă.
La momentul t, viteza corpului: $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$;

$$v = \sqrt{v_0^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}.$$

Timpul de cădere este: $t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Orientarea vitezei față de orizontală la momentul t este **3b**:

$$\text{tg}\alpha = \frac{v_y}{v_x} = \frac{gt}{v_0}.$$

Viteza corpului la sol $v_{sol} = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$.

4. Aruncarea oblică

Ce traiectorie au jeturile de apă care ies din furtunurile pompierilor?
Considerăm un corp aruncat cu viteza v_0 sub unghiul α față de orizontală de la nivelul solului. Studiul mișcării în câmp gravitațional se realizează prin descompunerea în două mișcări simple:

- pe orizontală (axa Ox), mișcare rectilinie uniformă cu viteza $v_x = v_{ox} = v_0 \cos\alpha$ și cu legea de mișcare:

$$x = v_0\, t \cos\alpha$$

- pe verticală (axa Oy), mișcare rectilinie uniform variată cu accelerația negativă ($a = -g$), având:

legea vitezei $v_y = v_{oy} - gt = v_0 \sin\alpha - gt$;

legea de mișcare: $y = v_{oy} \cdot t - \frac{gt^2}{2} = v_0 t \cdot \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$;

ecuația lui Galilei: $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 \cos^2\alpha + (v_0 \sin\alpha - gt)^2}$

Mișcarea pe verticală este independentă față de mișcarea pe orizontală. Mai obținem:

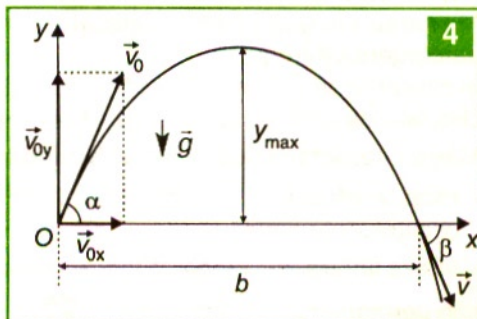
- ecuația traiectoriei, prin eliminarea timpului din cele două ecuații de coordonate scrise pe cele două axe Ox și Oy.

$$y = x \cdot \text{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha},$$

(parabolă) cu vârful în sus, deoarece coeficientul lui x^2 este negativ **4**;

- viteza pe axa Oy, în punctul de coordonată y este:

$$v_y = \sqrt{v_{oy}^2 - 2gy} = \sqrt{v_0^2 \sin^2\alpha - 2gy};$$



– orientarea vectorului viteză față de orizontală

$$\text{tg}\beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0\sin\alpha - gt}{v_0\cos\alpha} = \text{tg}\alpha - \frac{gt}{v_0\cos\alpha};$$

– pentru $v_y = 0$, obținem timpul de urcare $t_u = \frac{v_0\sin\alpha}{g}$ până la înălțimea maximă

$$y_{max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g};$$

– timpul de urcare până la înălțimea maximă este egal cu timpul de coborâre până când atinge din nou orizontala punctului de lansare, deci timpul total de mișcare este:

$$t_{total} = t_u + t_c = 2t_u, \quad t_{total} = \frac{2v_0\sin\alpha}{g};$$

– bătaia, sau distanța maximă parcursă pe orizontală, se obține punând condiția $y = 0$ în ecuația traiectoriei

$$b = x_{max} = v_x \cdot t = \frac{2v_0\sin\alpha \cdot v_0\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}.$$

La aceeași valoare a vitezei inițiale v_0, bătaia depinde de valoarea unghiului α. Introducând t_{total} în expresia vitezei v_y la un moment dat se obține $v_{cădere} = -v_0$, iar dacă se introduce în tgβ se obține $\text{tg}\beta = -\text{tg}\alpha$, adică $\beta = -\alpha$, deci corpul revine pe orizontală cu aceeași mărime a vitezei și lovește orizontala sub același unghi sub care a fost aruncat.

Pentru unghiul $\alpha = 45°$, bătaia este maximă $b_{max} = \frac{v_0^2}{g}$.

2.1.4 Mișcarea circulară uniformă** (facultativ)

Vârful acului indicator al unui ceas descrie o traiectorie circulară în mișcare uniformă, deoarece păstrează aceeași distanță r față de centru. Un punct material are o mișcare circulară uniformă dacă parcurge arce egale de cerc în intervale de timp egale. Viteza liniară este tangentă la cerc, este constantă în mărime, dar nu și în direcție. Mișcarea circulară este o mișcare periodică, deoarece se repetă identic după parcurgerea întregului cerc.

În mișcarea de rotație a unui corp solid față de o axă, toate punctele descriu traiectorii circulare de diferite raze r_i și cu viteze lineare tangențiale v_i diferite.

Mărimi caracteristice descrierii mișcării circulare uniforme:

– **raza vectoare** $\vec{r}$, este vectorul de poziție al unui punct material aflat pe circumferința cercului;

– **viteza liniară** $\vec{v}$, tangentă la traiectorie și constantă în modul, este perpendiculară în permanență pe raza vectoare 1;

– **perioada** T a mișcării circulare uniforme este intervalul de timp în care punctul material parcurge circumferința cercului $[T]_{SI} = 1\ s$;

– **frecvența** ν (sau f) reprezintă numărul de rotații complete efectuate în unitatea de timp; $[\nu]_{SI} = 1\ s^{-1}$.

În general, frecvența se exprimă în rotații pe secundă sau în hertzi. În practică vom întâlni și turația n, care ne arată numărul de rotații pe minut ($n = 60\ \nu$).

$$\left.\begin{cases} \text{o rotație } \dots\dots\dots\dots T(s) \\ \nu \text{ rotații } \dots\dots\dots\dots 1(s) \end{cases}\right\} \Rightarrow \nu = \frac{1}{T}; \left(\nu = \frac{1}{T}\right)$$

– **unghiul la centru** θ descris de raza vectoare, exprimat în radiani, este numeric egal cu raportul dintre lungimea s a arcului subîntins de acest unghi și raza r a cercului:

$$\theta = \frac{s}{r}; \quad [\theta]_{SI} = \text{rad}.$$

Radianul este unghiul la centru al unui cerc care subîntinde un arc de cerc egal cu raza cercului: 1 rad ≈ 57°;

Transformarea gradelor sexagesimale în radiani se face prin relația:

$$\begin{cases} 360^\circ \dots\dots\dots 2\pi\,(\text{rad}) \\ \alpha^\circ \dots\dots\dots\dots \theta\,(\text{rad}) \end{cases} \Rightarrow \theta\,(\text{rad}) = \frac{\pi}{180}\alpha^\circ;$$

– **vectorul viteză unghiulară** $\vec{\omega}$ al unei mișcări circulare și uniforme este mărimea fizică vectorială al cărei modul este egal cu raportul dintre unghiul la centru $\Delta\theta$ descris de raza vectoare și intervalul de timp corespunzător Δt:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta - \theta_0}{t - t_0}; \ [\omega]_{SI} = \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Dacă se consideră $t_0 = 0$, atunci timpul t reprezintă timpul efectiv de mișcare. Legea de mișcare: $\theta = \theta_0 + \omega t$, obținută din ultima definiție, exprimă unghiul la centru $\theta = f(t)$, descris de raza vectoare în timpul mișcării.

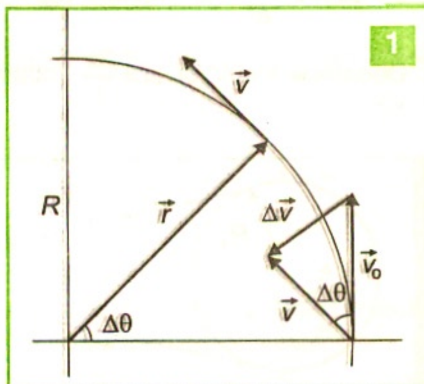
Vectorul viteză unghiulară este orientat perpendicular pe planul cercului, în centrul acestuia. Sensul vectorului viteză unghiulară este sensul de înaintare al unui burghiu drept, așezat perpendicular pe planul cercului și care este rotit în sensul mișcării pe cerc a punctului material considerat. În timp de o perioadă, T, raza vectoare $\vec{r}$ descrie un unghi la centru egal cu 2π, astfel că:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$$

Pentru mișcarea circulară din figura **1**, reprezentată în planul foii, vectorul $\vec{\omega}$ este perpendicular pe planul foii și iese din aceasta.

Lungimea cercului $2\pi r$ este parcursă cu viteza v, în timp de o perioadă. Cum $2\pi r = vT$, obținem:

$$v = \frac{2\pi}{T}r = \omega r,$$



Această relație se poate obține și din definiția vitezei pentru un interval de timp foarte mic:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta \cdot r}{\Delta t} = \omega r.$$

Putem redefini mișcarea circulară uniformă cu ajutorul vectorului viteză unghiulară. Mișcarea circular uniformă este mișcarea în care vectorul viteză unghiulară este constant în timp: $\vec{\omega} =$ const.

Vectorii $\vec{v}$, $\vec{\omega}$ și $\vec{r}$ sunt perpendiculari între ei **1**.
La mișcarea de rotație a unui corp solid rigid toate punctele au aceeași viteză unghiulară.

Vectorul accelerație centripetă

În oricare mișcare circulară uniformă, se modifică permanent direcția de mișcare a punctului material, fără să se modifice modulul vitezei, deci apare o variație a vectorului viteză.

Așadar, în mișcarea circular uniformă putem defini un vector accelerație $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ care este orientat de-a lungul razei cercului și spre centrul cercului și se numește accelerație centripetă. Într-un mic interval de timp Δt, atât direcția razei vectoare $\vec{r}$,cât și direcția vectorului viteză tangențială $\vec{v}$ (perpendiculară pe rază) se modifică cu același unghi $\Delta\theta$. Din scăderea celor doi vectori viteză, prin metoda grafică, obținem vectorul $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$, de la vârful scăzătorului către vârful descăzutului. **1** Construim un cerc cu raza egală în mărime cu mărimea vitezei $v = v_0$. În acest cerc de rază v, se observă că se poate aproxima arcul subîntins cu coarda $\Delta\vec{v}$, deoarece unghiul $\Delta\theta$ este mic (corespunde unui interval mic de timp $\Delta t \to 0$): $\Delta\theta = \frac{\Delta v}{v}$.

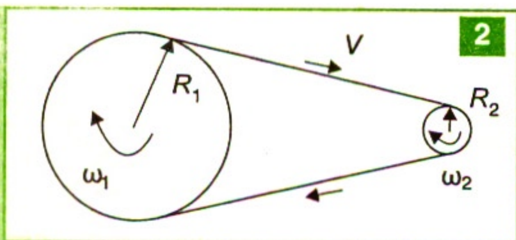
Prin operația de împărțire cu Δt rezultă $\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t}\frac{1}{v}$, de unde obținem:

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = v\frac{\Delta\theta}{\Delta t},$$

Deoarece $\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega$, rezultă $a_{cp} = \omega v$.

Deoarece $v = \omega r$ și $\omega = \frac{2\pi}{T}$, obținem după înlocuiri relațiile scalare echivalente:

$$a_{cp} = \omega v = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \frac{4\pi^2}{T^2} r.$$



Accelerația centripetă se mai numește normală sau radială și este orientată de a lungul razei vectoare, dar în sens contrar (către centru).

Relația vectorială:

$$\vec{a}_{cp} = -\omega^2\vec{r}$$

În mişcarea circular uniformă, vectorul accelerație are numai componentă normală, deoarece variază numai direcția și sensul vectorului viteză.

Probleme rezolvate

1. O curea de transmisie antrenează două roți. O roată are raza R_1 = 20 cm, iar cealaltă R_2 = 2 cm. Roata mică este pusă în mişcare de rotație cu viteza unghiulară $\omega_2 = 30$ rad/s. Cu ce viteză unghiulară se roteşte roata mare ? **2**

Rezolvare

Cele două roți fiind antrenate de aceeași curea de transmisie, vor avea vitezele liniare egale

$$v_1 = v_2 \Rightarrow \omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_2 R_2}{R_1} = 3\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

2. Care este viteza unghiulară de rotație a Pământului în jurul propriei axe, dacă perioada sa de rotație T = 24 h, iar raza medie a Pământului este R_P = 6400 km. Să se afle și viteza periferică a Pământului.

Rezolvare

a) Cum $T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{24 \cdot 3600} = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\frac{\text{rad}}{\text{s}}$;

b) $v = \omega R = \frac{2\pi}{T} \cdot R = 465\text{m/s} = 1674\text{ km/h}$.

Probleme

1. Vârful minutarului unui ceasornic dintr-un turn s-a deplasat cu 1,57 cm într-un minut. Care este lungimea L a minutarului ?
   a) L = 0,5 m; b) L = 0,1 m; c) L = 0,15 m; d) L = 0,2 m.

2. Un avion execută cu viteza v = 200 m/s un „looping" de rază R = 1,5 km în plan vertical. Distanța parcursă de avion este:
   a) 18,85 km; b) 9,42 km; c) 6,28 km; d) 3,770 km.

3. Un polizor are raza R = 15 cm. Polizorul se roteşte cu viteza liniară maximă v = 5 m/s. Valoarea turației maxime cu care se poate roti polizorul este:
   a) 191 rot/min; b) 31,64 rot/min; c) 955,4 rot/min; d) 318,47 rot/min.

4. O roată de bicicletă efectuează $N = 200$ rotații în timp $t = 100$ s. Viteza unghiulară a roții este:

a) 2 rad/s; b) 12,56 rad/s; c) 3,14 rad/s; d) 6,28 rad/s.

5. Viteza cu care trebuie să zboare un avion spre vest deasupra ecuatorului la înălțimea $h = 30$ km de suprafața Pământului, pentru a vedea Soarele staționar, dacă se cunoaște raza Pământulu $R = 6370$ km, este:

a) 232,6 m/s; b) 350 m/s; c) 465 m/s; d) 930 m/s.

6. Un autocamion cu diametrul roților D se mișcă cu viteza V, iar un autoturism cu diametrul roților d se mișcă cu viteza v. Dacă turațiile roților celor două vehicule sunt egale, ce relație se poate stabili între v și V?

a) $v < V$; b) $v = V$; c) $v > V$; d) nici una.

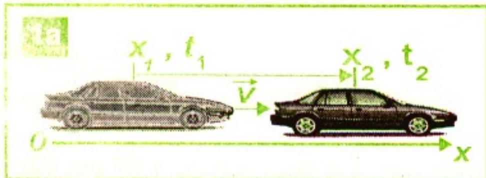
7. Doi sportivi iau startul simultan într-o întrecere de alergare de fond pe o pistă circulară. Primul sportiv aleargă cu o viteză medie $v_1 = 300$ m/min, iar al doilea cu o viteză medie $v_2 = 200$ m/min. Câte ture efectuează fiecare sportiv până când primul sportiv îl depășește prima oară pe cel de-al doilea ?

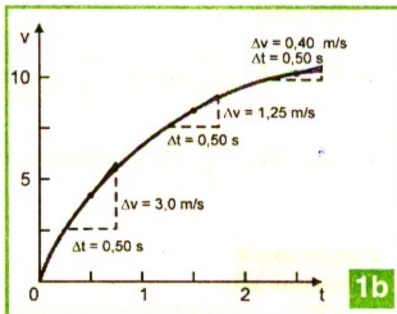
al doilea sportiv	primul sportiv
a) 4 ture	5 ture
b) 3 ture	4 ture
c) 2 ture	3 ture
d) 1 tură	3 ture

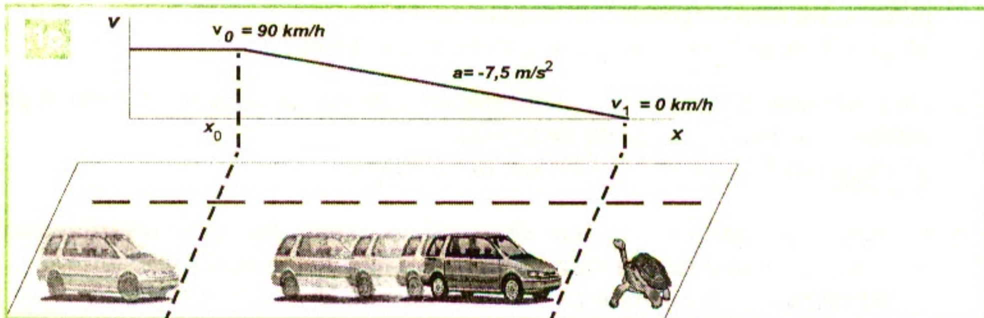
8. Diametrul roții unui tramvai este de 50 cm. Tramvaiul se deplasează pe o curbă de rază $R = 150$ m. Viteza centrului de greutate al tramvaiului este $v = 54$ km/h. Distanța dintre șine este $d = 1,57$ m. La ce interval de timp roata exterioară execută o rotație mai mult decât roata interioară ?

Proiect de recapitulare - cinematică

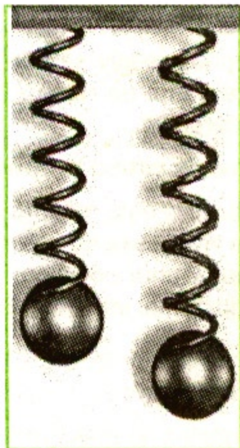
Ce tipuri de mișcări corespund reprezentărilor grafice ? 1







Noțiuni introductive



Sistemul mecanic (unul sau mai multe corpuri delimitate de mediul exterior printr-o suprafață reală sau imaginară) este considerat izolat dacă nu este supus acțiunii forțelor exterioare. Prin interacțiune înțelegem acțiunea reciprocă a unui sistem mecanic asupra altui sistem mecanic, prin intermediul forțelor. Efectele interacțiunilor depind de durata acțiunii forțelor exterioare asupra sistemului mecanic considerat și pot produce: accelerare (modificarea stării de repaus sau de mișcare a corpurilor unui sistem) și deformare (modificarea configurației spațiale a corpurilor în sistem).

Fenomenul fizic, observat ca eveniment în natură sau provocat în laborator, reprezintă stările pe care le are un sistem fizic în momente succesive ale unui interval de timp. Descrierea fenomenelor fizice se face în fiecare etapă de studiu, cu ipoteze simplificatoare, pe modele. O lege fizică poate fi formulată prin relații matematice în care simbolurile reprezintă mărimile fizice care intervin în descrierea fenomenului. Legile empirice sunt bazate numai pe rezultate experimentale și nu se demonstrează matematic cu alte formule. Teorema afirmă o relație fizică ce poate fi demonstrată matematic. Un principiu este o lege fundamentală, admisă de „toată lumea cu bun simț științific" fără demonstrație, deoarece nu mai putem folosi alte legi pentru verificarea ei. Altfel spus, principiul este un adevăr fundamental care se impune deoarece nu este infirmat de nici un experiment.

Principiile dinamicii sunt legi cu caracter general, verificate pe un număr mare de situații, ireductibile la altele cunoscute.

Inerția corpurilor se manifestă în diferite moduri observabile.

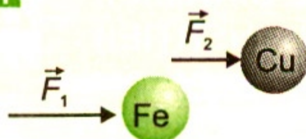
Un corp lansat pe un plan se oprește după un timp cu atât mai lung cu cât rezistența întâmpinată din partea planului este mai mică. Trenurile cu suspensie magnetică întâmpină o rezistență foarte mică, atunci când se mișcă. Un corp aflat pe o pernă de aer are o mișcare rectilinie și uniformă.

Dacă un corp se află în repaus și nu acționăm asupra lui, el își păstrează starea de repaus.

Rezultă formularea primului principiu, numit principiul inerției.

Principiul inerției: un corp își menține starea de repaus relativ sau de mișcare rectilinie și uniformă ($\vec{v} = const.$) față de un referențial atâta timp cât asupra lui nu acționează alte corpuri exterioare care să îi modifice această stare.

Asupra unui corp cu masă mai mare trebuie să acționeze o forță mai mare ca să îl scoatem din repaus. **1** De asemenea, pentru a opri un corp aflat în mișcare trebuie să acționăm cu o forță cu atât mai mare, cu cât masa corpului este mai mare. Pentru a devia un corp de la traiectoria lui trebuie să-l lovim oblic cu o forță cu atât mai mare,



cu cât masa corpului este mai mare. La orice acțiune exterioară, corpul încearcă să se opună schimbării stării de mișcare. El tinde să-și păstreze starea de mișcare avută anterior în virtutea inerției. **Orice corp are proprietatea de inerție**: „opune o rezistență", care depinde de masa lui, la acțiunea oricărei forțe care încearcă să-i schimbe starea de repaus relativ sau de mișcare uniform rectilinie, adică are tendința să își mențină starea lui de repaus relativ sau de mișcare rectilinie uniformă relativă față de un referențial.

Inerția este o proprietate măsurabilă a oricărui corp

Masa m este măsura proprietății de inerție a unui corp, care nu depinde de poziția, de viteza sau de natura substanței din care este constituit. În orice loc de pe Pământ, masa unui corp are aceeași valoare pe oricare cântar etalonat corect. Natura substanței intervine în definirea densității corpului:

$$\rho = \frac{m}{V};\ [\rho]_{SI} = \frac{kg}{m^3}.$$

Unitatea de masă $[m]_{SI}$ = kg este fundamentală în sistemul internațional de unități SI.

Aplicații practice

Când batem covoarele sau hainele, în virtutea inerției, particulele de praf continuă să stea pe loc. Când un autobuz pune frână brusc, ne ducem înainte, dacă nu ne ținem, deoarece avem tendința să ne păstrăm starea de mișcare avută anterior. La fel, când pornește brusc, ne ducem în spate, deoarece tindem să rămânem în repaus în virtutea inerției. La curbe suntem aruncați în afara acesteia datorită inerției. Cu cât masa noastră este mai mare, cu atât inerția noastră este mai mare.

Generalizarea și extrapolarea rezultatelor observațiilor experimentale în formularea principiului I

Principiul inerției este valabil numai în sisteme de referință numite inerțiale (SRI). Cele mai riguroase sisteme de referință inerțiale sunt legate de stele. Din această cauză sistemele de referință legate de Pământ sunt mai puțin precise deoarece Pământul se rotește față de stele.Totuși, în general, putem considera Pământul un sistem de referință inerțial suficient de precis, în studiul mecanicii.
Sistemele de referință inerțiale se mișcă rectiliniu și uniform unele față de altele.
Pământul se mișcă rectiliniu cu viteză practic constantă pe o mică porțiune din traiectoria sa pe durata unui eveniment mecanic. Știm că mișcarea mecanică este relativă. Dacă tu ai o viteză $\vec{v}$, față de un corp aflat în repaus pe Pământ (SRI), atunci acest corp are o viteză $-\vec{v}$ față de tine. Sistemele de referință care sunt în repaus relativ sau se deplasează cu viteză constantă în raport cu Pământul sunt sisteme de referință inerțiale ca și Pământul.

Dacă ești în repaus într-un sistem de referință inerțial, poți folosi principiul inerției: în virtutea inerției, orice corp tinde să-și păstreze starea de repaus sau să-și păstreze starea de mișcare uniformă față de Pământ.
Sistemele de referință care se mișcă accelerat sau încetinit față de Pământ sunt numite neinerțiale (SRN). În asemenea sisteme de referință, nu este valabil principiul inerției.

TESTE

La următoarele afirmații răspundeți cu A dacă afirmația respectivă este adevărată sau cu F dacă este falsă:

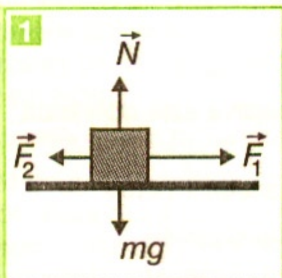
1. A F. Două vagoane cu aceeași viteză, dar mase diferite au aceeași inerție.
2. A F. Două vagoane cu aceeași viteză și mase egale au aceeași inerție.
3. A F. Două vagoane cu viteze diferite și mase egale au aceeași inerție.
4. A F. Dacă două sfere cu aceeași rază au densitățile ρ_{lemn} = 800kg/m^3 și respectiv, $\rho_{fontă}$ = 7800 kg/m^3 și le aruncăm în apă are inerția mai mare sfera din lemn.
5. A F. Dacă două sfere cu aceeași rază și cu densitățile ρ_{lemn} = 800 kg/m^3 și respectiv, $\rho_{fontă}$ = 7800 kg/m^3 sunt în cădere liberă, are inerția mai mare sfera din fontă.

Probleme

1. Care este măsura inerției unui corp ?
a) forța;
b) viteza;
c) accelerația;
d) masa.

2. Un corp își păstrează starea de mișcare rectilinie uniformă sau se află în repaus numai dacă:
a) asupra corpului acționează o singură forță;
b) asupra corpului acționează două forțe cu orientări diferite;
c) asupra corpului acționează mai multe forțe cu orientări diferite, iar rezultanta lor este nenulă;
d) asupra corpului acționează mai multe forțe cu orientări diferite, iar rezultanta lor este nulă.

Principiul fundamental al dinamicii



Starea mecanică a corpurilor poate fi modificată ca urmare a unei interacțiuni

Atunci când un corp sau mai multe corpuri exercită acțiuni mecanice asupra altui corp, putem spune că asupra acestui corp acționează o forță sau mai multe forțe (gravitațională, de tracțiune, de frecare etc.). Corpurile interacționează: prin contact direct sau la distanță (prin legături rigide sau elastice și prin intermediul unui câmp fizic).

Experimentele efectuate în laborator permit atât descrierea și explicarea interacțiunilor prin contact direct sau prin legături, cât și a interacțiunilor gravitaționale dintre un corp și Pământ. O măsură a interacțiunii dintre corpuri este vectorul forță.

Forțele pot produce și întreține translații, rotații ale corpurilor (dacă suportul lor nu trece prin centrul de masă al corpurilor cu dimensiuni) sau deformații. Vom considera doar exemple și probleme care implică numai mișcarea de translație sau echilibrul punctului material. Celelalte efecte vor fi studiate în alte capitole.

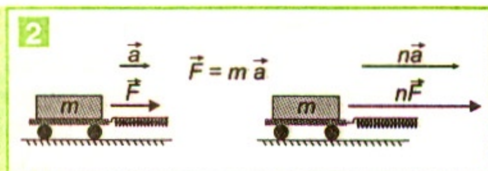
Dacă suportul forțelor care acționează aspra unui corp se intersectează într-un punct, atunci acel corp, de orice dimensiuni, se comportă ca un punct material. Un corp poate interacționa cu mai multe corpuri. Toate aceste interacțiuni se traduc prin forțe aplicate corpului considerat. Se obține astfel un sistem de forțe concurente. 1

Exemple

1. Pentru a scoate din repaus două corpuri cu mase diferite, de exemplu o cutiuță și o cutie mare, și pentru a le aduce în aceeași stare de mișcare, trebuie să acționăm cu forțe diferite, mai mare în cazul cutiei mari.
2. Pentru a mări viteza unui corp care se mișcă uniform trebuie să acționăm cu o forță. Forța va fi cu atât mai mare, cu cât masa corpului este mai mare.

De exemplu, pentru a accelera la fel un autoturism și un autobuz care aveau aceeași viteză, forța dezvoltată de motor va fi mai mare în cazul autobuzului.

Principiul al II-lea al dinamicii, denumit și **principiul fundamental al dinamicii** se referă la efectul de accelerare al acțiunii unei forțe rezultante nenule ($\vec{F} \neq 0$) asupra unui corp (redus la un punct material, în centrul de masă). *Centrul de masă* este un punct asociat unui corp în care se consideră concentrată întreaga masă a acestuia.

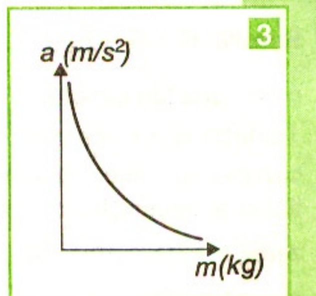


Dacă asupra unui corp acționează o forță $\vec{F}$, ea îi imprimă corpului o accelerație. Dacă forța devine 2 $\vec{F}$, 3 $\vec{F}$, ..., n $\vec{F}$, se constată că accelerația corpului crește de două ori, trei ori, ..., de n ori.

Prin urmare, forța care acționează asupra unui corp îi imprimă acestuia o accelerație direct proporțională cu forța aplicată $\vec{a} \sim \vec{F}$ **2**.

Dacă acționăm cu o forță asupra unor corpuri diferite se constată experimental că accelerația variază invers proporțional cu forța aplicată:

$$\vec{a} \sim 1/m \quad \mathbf{3}.$$



Dacă o forță $\vec{F}$ acționează asupra unui corp, aceasta îi imprimă o accelerație $\vec{a}$ cu mărimea direct proporțională cu a forței, pe aceeași direcție și în același sens cu forța respectivă:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \cdot$$

Unitatea de măsură a forței (derivată în SI):

$$|F|_{SI} = |m||a| = 1\text{kg} \cdot 1\text{m/s}^2 = 1\text{N}, \text{ numită newton.}$$

Newtonul reprezintă valoarea forței care acționează asupra unui corp cu masa $m = 1$ kg și îi imprimă accelerația $a = 1$ m/s^2.
Principiul al doilea al dinamicii se aplică întotdeauna, indiferent de natura forței (gravitațională, elastică, electrică, electromagnetică etc.).

Inerția corpurilor influențează efectul interacțiunii acestora

Dacă forța rămâne constantă, atunci și accelerația determinată de acțiunea ei rămâne constantă. Forțe diferite aplicate corpurilor cu mase egale produc accelerații proporționale cu forțele. Factorul de proporționalitate este masa acestora, care este măsura inerției lor. Dacă un corp se deplasează cu o accelerație înseamnă că asupra acestui corp acționează o forță rezultantă.
Pentru a pune în mișcare cu aceeași accelerație un cărucior gol și unul plin, trebuie să acționăm cu o forță mai mare asupra căruciorului plin, datorită inerției mai mari a acestuia. Dacă un corp se mișcă rectiliniu și uniform și vrem să-i schimbăm direcția de mișcare, va trebui sa acționăm cu o forță cu atât mai mare, cu cât corpul are masa mai mare.
Compunerea cauzelor (forțelor) presupune compunerea efectelor (accelerațiilor).
Principiul suprapunerii forțelor, cunoscut și sub numele de principiul superpoziției sau principiul independenței acțiunii forțelor, afirmă:

Dacă asupra unui corp acționează simultan mai multe forțe $\vec{F}_1, \vec{F}, \vec{F}_3 \ldots\ldots \vec{F}_n$ atunci efectul este o mișcare a corpului cu accelerația rezultantă egală cu cea produsă de forța rezultantă $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \vec{F}_n$.

Acest principiu este în acord cu principiul fundamental: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, adică efectul fiecărei forțe de producere a unei accelerații este independent de prezența celorlalte forțe:

$$\vec{F}_1 = m \cdot \vec{a}_1; \vec{F}_2 = m \cdot \vec{a}_2; \ldots\ldots\ldots\ldots \vec{F}_n = m \cdot \vec{a}_n.$$

Rezultă $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + ...\vec{F}_n = m(\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + ... + \vec{a}_n)$, relație echivalentă cu ecuația fundamentală a mecanicii clasice* $\vec{F} = m\vec{a}_{rezultantă}$.

Ecuația fundamentală a mecanicii clasice $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ rezumă experiențele și cazurile descrise. Observăm că principiul I al dinamicii este conținut în principiul al IIâlea al dinamicii ca un caz particular, deoarece atunci când forța rezultantă este zero ($\vec{F} = 0$), corpul este supus acțiunii forțelor care îndeplinesc condiția de echilibru) și accelerația este zero ($\vec{a} = 0$), deci corpul își păstrează starea de repaus sau de mișcare rectilinie uniformă, în raport cu un referențial inerțial. Rezultă că un corp este în echilibru într-un referențial în care este valabil principiul inerției.

Principiul II ca definiție dinamică a forței

Impulsul $\vec{p}$ al corpului de masă *m* care se mișcă cu viteza $\vec{v}$ (față de un referențial) se definește prin produsul dintre masa corpului și viteza acestuia $p = m \cdot \vec{v}$, unde $[p]_{S.I.}$= 1 kg·m/s.
Deoarece înmulțirea unui vector cu un scalar este o adunare repetată, rezultă că impulsul $\vec{p}$ este coliniar cu viteza $\vec{v}$ (are sensul și direcția acesteia, deci este tangent la traiectoria corpului considerat) și este de *m* ori mai mare decât viteza $\vec{v}$.
Acțiunea oricărei forțe $\vec{F}$, indiferent de natura ei, poate modifica starea de mișcare a unui punct material dacă produce o accelerație $\vec{a}$:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t - t_0} = \frac{\vec{p} - \vec{p}_0}{t - t_0} \quad \Rightarrow \Delta\vec{p} = \vec{F} \cdot \Delta t \ .$$

Impulsul forței se definește prin produsul $\vec{F} \cdot \Delta t$ și măsoară efortul necesar pentru a schimba starea de mișcare a corpului asupra căruia acționează.

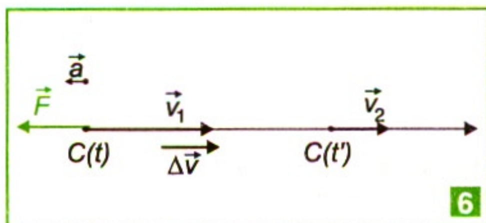
$$[F \cdot \Delta t]_{SI} = \mathrm{N \cdot s} = \mathrm{kg\ m/s}.$$

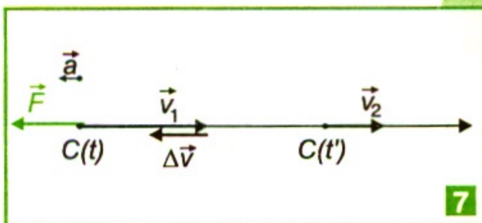
Variația impulsului unui punct material într-un interval de timp este egală cu impulsul forței rezultante care acționează asupra punctului material în acest interval de timp.
Aceasta este formularea *teoremei de variație a impulsului pentru un punct material.*

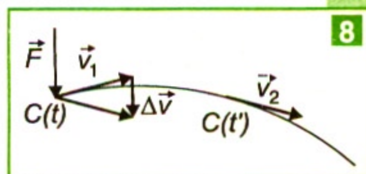
Impulsul forței pentru o forță rezultantă constantă care acționează asupra unui corp într-un interval de timp *Δt* produce o variație a impulsului a acelui corp.
O variație a impulsului se obține cu o forță mică pe o durată mare sau cu o forță mare pe o durată mică.

---

* *mecanica clasică* = parte a mecanicii care se ocupă cu studiul mișcărilor cu viteze mult mai mici decât viteza luminii $c = 3 \cdot 10^8$ m/s.







Impulsul unui corp se poate schimba numai în urma unei interacțiuni, în urma căreia se face un transfer de mișcare mecanică de la un corp la altul. Impulsul este o măsură a mișcării mecanice a corpului.

Aplicații ale principiului II în diferite situații

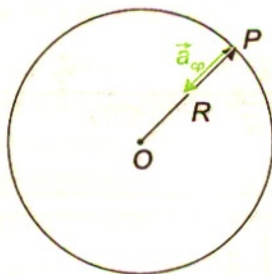
1) Dacă un corp se mișcă rectiliniu și uniform cu $\vec{v}$ și acționăm asupra lui în momentul *t* cu o forță $\vec{F}$ pe direcția și în sensul mișcării corpului, imprimăm acestuia o accelerație pe aceeași direcție și în același sens cu forța $\vec{F}$. Deoarece vectorul $\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \neq 0$ înseamnă că și $\vec{v}_1$ variația vectorului viteză $\Delta\vec{v}$ are aceeași direcție și sens cu vectorul $\vec{a}$. Cum $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \Rightarrow \vec{v}_2 + \Delta\vec{v}$, adică $\vec{v}_2$ are aceeași direcție și sens cu $\vec{v}_1$, dar modulul mai mare. Deci sub acțiunea forței $\vec{F}$, corpul va avea o mișcare accelerată. 6

2) Dacă un corp se mișcă rectiliniu și uniform cu viteza $\vec{v}_1$ și acționăm asupra lui cu o forță $\vec{F}$ pe direcția și în sens opus mișcării, accelerația imprimată va avea aceeași direcție și sens cu forța $\vec{F}$, deci și $\Delta\vec{v}$ va avea aceeași direcție și sens cu $\vec{a}$, dar mărimea mai mică.

Corpul va avea o mișcare încetinită. Deci când forța aplicată este coliniară cu viteza, nu se schimbă caracterul rectiliniu al mișcării, aceasta putând deveni accelerată sau încetinită. 7

3) Dacă forța se aplică oblic față de direcția inițială de mișcare, $\Delta\vec{v}$ și $\vec{F}$ vor avea aceeași direcție și sens, deci traiectoria se va curba înspre regiunea în care este îndreptată forța 8.

Un caz particular îl constituie mișcarea circulară uniformă (mișcarea în care traiectoria este un cerc, iar mobilul descrie arce de cerc egale în intervale de timp egale). În acest caz, viteza are același modul, $v = v_0$, dar direcția și sensul vectorului viteză



se schimbă. Prin urmare, vectorul viteză variază $\Delta\vec{v} \neq 0$ și există o accelerație

$\vec{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \neq 0$, care are numai componentă normală și din această cauză are direcția razei și este îndreptată spre centru. Accelerația în mișcarea circulară uniformă se numește accelerație centripetă $\vec{a}_{cp}$. 9 Asupra corpului aflat în mișcare circular uniformă trebuie să acționeze o forță numită forță centripetă:

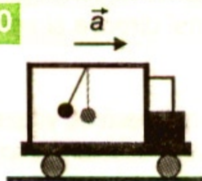
$$\vec{F}_{cp} = m \cdot \vec{a}_{cp} .$$

Atragem atenția că forța centripetă nu este un nou tip de forță, ci o forță reală sau rezultanta tuturor forțelor reale care acționează asupra corpului și aceasta poate fi: forța de atracție (în cazul sateliților), forță de frecare în curbe (în cazul autovehiculelor), tensiunea în fir, forță elastică, forță de apăsare normală, greutatea corpului sau rezultanta acestor forțe.

Sistemele de referință neinerțiale (SRN)** (facultativ)

Sistemele de referință care se mișcă accelerat sau încetinit sunt numite neinerțiale (SRN). Principiile lui Newton sunt valabile numai față de sisteme de referință inerțiale (SRI), adică neaccelerate. Ai observat cum sunt proiectați călătorii sau obiectele dintr-un autovehicul care pornește sau frânează brusc, dacă nu se prind de părțile fixe ale autobuzului ! Dacă ești într-un autoturism care pornește cu accelerație, simți că ești împins sau presat de spătarul scaunului care exercită asupra ta o forță numită forța de inerție.

Într-un sistem de referință neinerțial, apar forțe de inerție, care pot fi măsurate de observatorii situați în aceste sisteme. 10 Expresia forței de inerție este:



$\vec{F}_{inertie} = -m \cdot \vec{a}$ pe direcția accelerației, dar în sens opus accelerației.

Prin nici un experiment efectuat în cadrul unui sistem de referință neinerțial observatorul neinerțial nu poate decela forța de inerție de celelalte forțe reale.

Probleme rezolvate

Metodă generală de rezolvare:

Se consideră corpul studiat punct material și se reprezintă toate forțele care acționează asupra acestuia. Se aplică apoi principiul suprapunerii neperturbate a forțelor. Se alege convenabil un sistem de axe de coordonate și apoi se proiectează

ecuația vectorială pe axele de coordonate, obținându-se un sistem de ecuații scalare care se rezolvă.

1. Un om cu masa m = 70 kg se află într-un lift care pornește accelerat cu accelerația $a = 2\ m/s^2$. Să se afle cu ce forță apasă omul pe podeaua liftului ?($g = 10\ m/s^2$)

Rezolvare

Reprezentăm forțele care acționează asupra omului aflat în lift. Alegem axa *Ox* îndreptată în sus, proiectăm relația vectorială pe acea axă și obținem:
$N - G = m\,a$, $N = m\,(g + a) = 840$ N. Cum $G = m\,g = 700$ N, $G < N$, într-un lift care pornește accelerat în sus, părem mai grei.

2. Un corp este suspendat de un fir vertical și se află într-un tren care pornește accelerat cu accelerația $a = 2\ m/s^2$. Să se precizeze tangenta unghiului cu care deviază pendulul față de verticală ($g = 10\ m/s^2$).

Rezolvare

Reprezentăm forțele care acționează asupra pendului aflat în tren. Proiectăm pe axele de coordonate alese ca în figură: pe *Ox*: $T\sin\alpha = m\,a$ și pe *Oy*: $T\cos\alpha = m\,g$. Împărțind cele două relații obținem $\mathrm{tg}\,\alpha = a / g = 0{,}2$. Pendulul deviază în sens contrar accelerației, deoarece în virtutea inerției pendulul tinde să își păstreze starea de mișcare avută anterior. Din această cauză în trenuri becurile se fixează și nu se pun lămpi verticale.

3. De tavanul unui lift se prinde prin intermediul unui dinamometru un scripete ideal (fără masă). **11** Peste scripete trece un fir ideal care susține două corpuri cu masele $m_1 = 2$ kg și $m_2 = 1$ kg. Să se precizeze ce forță indică dinamometrul ? ($g = 10\ m/s^2$)

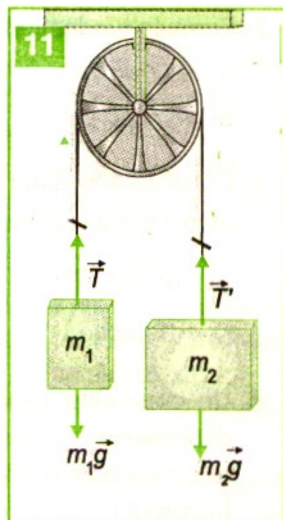
Rezolvare

Deoarece sunt două corpuri, studiem mișcarea fiecăruia dintre ele separat. Deoarece $m_1 > m_2$, corpul 1 coboară și corpul 2 urcă cu aceeași accelerație. Pentru corpul 1 reprezentăm forțele și scriem ecuația vectorială, o proiectăm pe axa *Ox* aleasă în jos și obținem $m_1 g - T = m_1 a$. Procedăm analog pentru corpul al doilea, alegem axa *Ox* în sus și proiectăm ecuația pe axa *Ox*, obținem $T - m_2 g = m_2 a$. Adunăm cele două ecuații scalare astfel obținute, astfel că,

$$a = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2},\ T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\ ;$$

Asupra scripetelui acționează cele două tensiuni în jos și forța indicată de acesta în sus, deoarece fiind ideal rezultanta forțelor este nulă:

$$F = 2T = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2}g = 13{,}33\ \text{N}\ .$$



TESTE

La următoarele afirmații răspundeți cu A dacă afirmația respectivă este adevărată sau cu F dacă este falsă:

1. AF. Două vagoane cu aceeași viteză și mase egale pot fi oprite cu forțe egale în intervale de timp egale.
2. AF. Două vagoane cu aceeași viteză și mase diferite sunt oprite cu forțe egale în intervale de timp egale.
3. AF. Două vagoane cu viteze diferite și mase egale sunt oprite cu forțe egale în intervale de timp egale.
4. AF. Un pendul aflat într-un vagon care se mișcă rectiliniu uniform încetinit va fi deviat în sensul de mișcare.

Probleme

1. Ce principiu se exprimă prin: „Dacă mai multe forțe acționează în același timp asupra unui punct material, fiecare forță produce propria sa accelerație în mod independent de prezența celorlalte forțe, accelerația rezultantă fiind suma vectorială a accelerațiilor individuale“ ?
   a) principiul inerției;
   b) principiul fundamental al dinamicii;
   c) principiul acțiunii independente a forțelor.

2. Formula fundamentală a dinamicii este:
   a) $\vec{G} = m\vec{g}$;
   b) $\vec{F} = -k\vec{x}$;
   c) $\vec{F} = m\vec{a}$;
   d) $\vec{F} = \mu\vec{N}$.

3. Considerând două forțe concurente $F_1 = F_2 = F$, care fac între ele un unghi α, atunci mărimea rezultantei este:
   a) $F\sqrt{2(1+\cos\alpha)}$;
   b) $F(1+\cos\alpha)$;
   c) $F\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$;
   d) $F\sqrt{2}$.

4. Un corp este suspendat de un dinamometru și se află într-un lift care se deplasează accelerat în sus. Ce indică dinamometrul ?
   a) corpul pare mai greu;
   b) corpul pare mai ușor;
   c) corpul este la fel de greu;
   d) dinamometrul nu indică nimic.

5. Care din afirmațiile următoare este adevărată ?

a) accelerația vehiculului este mai mare, cu cât unghiul firului cu plumb față de verticală este mai mare;

b) viteza vehiculului este cu atât mai mare, cu cât unghiul firului cu plumb față de verticală este mai mare;

c) accelerația vehiculului este cu atât mai mare, cu cât unghiul firului cu plumb față de verticală este mai mic;

d) viteza vehiculului este cu atât mai mare, cu cât unghiul firului cu plumb față de verticală este mai mic.

6. Un corp de beton cu masa $m = 1$t este prins cu un cablu de o macara, care îl ridică vertical accelerat cu accelerația $a = 2$ m/s^2. Valoarea maximă a tensiunii din cablu are valoarea:

a) 12 kN; b) 10 kN; c) 2 kN; d) 8 kN.

7. Într-un lift care urcă încetinit cu accelerația $a = 2$ m/s^2 se află un om cu masa $m = 80$ kg. Valoarea forței cu care apasă omul pe podeaua liftului este($g = 10$ m/s^2):

a) 200 N; b) 640 N; c) 800 N; d) 960 N.

8. Un om cu masa $M = 60$ kg susține un corp cu masa $m = 20$ kg cu ajutorul unui fir inextensibil trecut peste un scripete fix. Valoarea forței de apăsare normală exercitată de acel om pe suprafața de sprijin, dacă firul este înclinat cu 30^0 față de verticală ($g = 10$ m/s^2) este:

a) 400 N; b) 427 N; c) 500 N; d) 600 N.

9. Asupra unui corp cu masa $m = 2$ kg aflat în mișcare pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 30^0$ acționează o forță F, sub un unghi $\alpha = 60°$ față de planul înclinat. Corpul se mișcă fără frecare ($g = 10$ m/s^2). Să se afle:

a) valoarea forței cu care se acționează pentru ca accelerația corpului să fie $a = 5$ m/s;

b) valoarea forței pentru care corpul nu mai apasă pe planul înclinat.

10. Peste un scripete ideal este trecut un fir inextensibil care susține două corpuri cu mase $m_1 = 2$ kg și $m_2 = 4$ kg, ținute inițial în repaus. Se lasă liber sistemul. Se neglijează frecarea cu aerul ($g = 10$ m/s^2). Să se calculeze:

a. accelerația cu care se mișcă corpurile și care este valoarea tensiunii din fir;

b. dacă se dezleagă firul ce susține masa m_1 și se trage de fir în jos cu greutatea corpului 1, care va fi noua accelerație a corpului 2 ?

11. De tavanul unui vagon este suspendat un corp cu masa $m = 3$ kg, prin intermediul a două fire de aceeași lungime așezate simetric în planul vertical al mișcării. Unghiul dintre cele două fire este $\alpha = 90^0$ ($g = 10$ m/s^2). Să se calculeze:

a) care vor fi tensiunile din cele două fire când vagonul merge accelerat cu accelerația $a = 1$ m/s^2.

b) dacă tensiunea de rupere a firelor este $F = 10$ N, care fir se va rupe primul și la ce accelerație ?

PRINCIPIUL AL III-LEA AL DINAMICII (PRINCIPIUL ACȚIUNII ȘI REACȚIUNII)

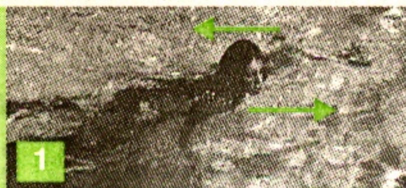
Pe durata unei interacțiuni asupra fiecărui corp acționează câte o forță

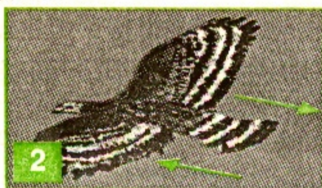
Fiecare dintre forțe are obiectul acțiunii.

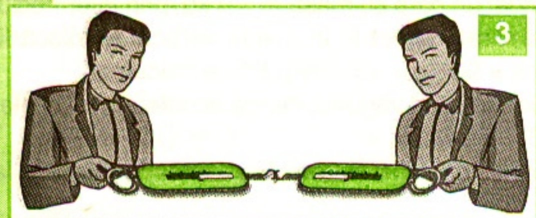
Exemple

Dacă lovești o minge cu forța *F* a brațului, aceasta exercită forța opusă –*F*, pe care o simți la încetinirea brațului.
Masa de fluid *M* împinsă înapoi cu o anumită viteză *v* (de un motor rachetă, înotător etc.) implică o forță de reacție egală care va determina o deplasare a corpului în sens opus. 1 O pasăre care zboară împinge aerul înapoi, iar aerul o împinge înainte. 2

Forțele de frecare între corpuri sunt reciproce. Forțele de contact sau de legătură apar între corpuri care se ating într-un punct sau pe o suprafață comună ori de câte ori un corp alunecă față de altul, apasă unul asupra celuilalt, trag unul de celălalt, se ciocnesc sau împing unul pe celălalt. Atunci când ținem pe brațe un corp, simțim că acesta exercită o forță asupra brațelor. Brațele exercită și ele o forță asupra corpului. În cazul unei interacțiuni dintre două corpuri apar două forțe pereche, care prezintă o serie de caracteristici. Forța de apăsare normală a corpului asupra suportului este egală cu forța de reacțiune normală din partea suportului. Corpurile pot fi considerate rigide în asemenea situații. Mâna se poate deforma local la acțiunea forței exercitate de un corp în zona de contact, iar corpul se deformează mai mult sau mai puțin, în funcție de proprietățile sale elastice, la acțiunea de prindere a mâinii. „Trasul frânghiei“ solicită la întindere atât frânghia cât și pe fiecare concurent.
Dacă tragi de două dinamometre cuplate la cârligul folosit pentru agățarea corpurilor, cele două dinamometre indică aceeași valoare a forțelor de interacțiune. 3 Aerul eliminat dintr-un balon care se dezumflă împinge balonul în sens invers, deci forțele de interacțiune apar simultan și sunt opuse.


1


2


3

Generalizarea rezultatelor observațiilor experimentale în formularea principiului al III-lea

Pe baza observațiilor putem concluziona că la interacțiunea a două

corpuri apar două forțe: una numită acțiune, cu care primul corp acționează asupra celui de-al doilea și, alta numită reacțiune, cu care cel de-al doilea corp acționează asupra primului corp. Putem observa că cele două forțe au aceeași direcție și sensuri opuse, iar din experimentul cu cele două dinamometre putem trage concluzia că forțele au module egale. Cele două forțe se aplică la corpuri diferite și nu se anulează reciproc.

Fenomenele analizate evidențiază că interacțiunea dintre corpuri înseamnă acțiuni reciproce, simultane și de sens opus.

Principiul acțiunii și reacțiunii:

Dacă un corp A exercită asupra altui corp B o forță numită acțiune, atunci și corpul B exercită asupra corpului A o forță numită reacțiune, egală în mărime, pe aceeași direcție și de sens opus.

Altfel spus: oricărei acțiuni i se opune întotdeauna o reacțiune sau acțiunile reciproce dintre corpuri sunt egale și orientate în sensuri opuse. La fiecare dintre corpuri apar efectele forței care acționează asupra sa. Efectele pot fi: statice (deformații) și dinamice (accelerații).

Acțiunea și reacțiunea nu se anihilează, deoarece se exercită asupra unor corpuri diferite.

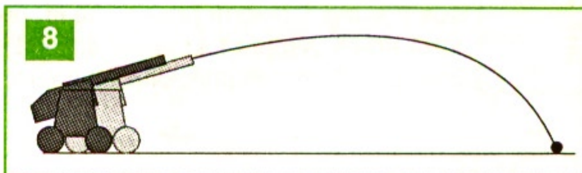
Aplicarea principiului III în câteva situații



1. Ai observat că poți să te miști înapoi împingând cu o forță în alt corp un interval de timp. Dacă acest corp are masa foarte mare, doar tu te miști. În brațul tău, care se întinde ca un resort, se dezvoltă o forță musculară internă variabilă, al cărui punct de aplicație se deplasează în direcția deplasării tale față de perete. 4

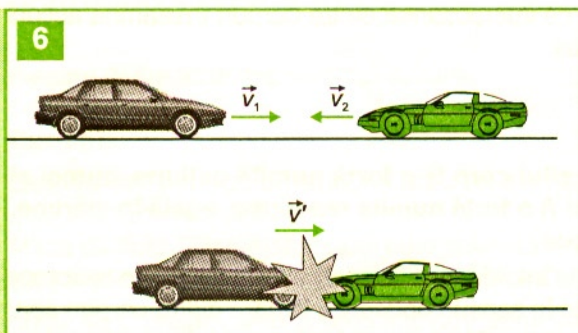
2. Dacă un resort comprimat între două corpuri se destinde, când se taie firul care le ține apropiate, acesta exercită asupra corpurilor forțe egale și de sens contrar, iar când corpurile sunt identice, ele se vor mișca la fel.

3. Dacă asupra unui proiectil „acțiunea" exercită o forță în urma arderii explozivului asupra armei, „reacțiunea" exercită o forță opusă 5 .



4. Dacă unești palmele și le deplasezi cu frecare, una față de alta, în procesul acestei interacțiuni simți că fiecare palmă o apasă pe cealaltă și că totodată palmele se freacă una de cealaltă, adică fiecare exercită asupra celeilalte câte o forță, conform principiului al treilea.

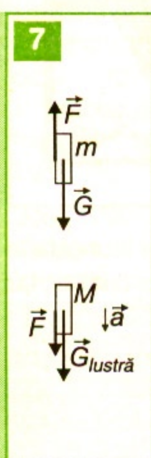
5. Când două mașini se ciocnesc, 6 fiecare acționează asupra celeilalte cu câte o forță, astfel că cele două forțe deși sunt egale, produc efecte diferite și mașinile se deformează diferit. De exemplu, dacă bara de protecție lovește într-o portieră aceasta se îndoaie, în timp ce bara se poate doar zgâria. La viteze mari se îndoaie și bara.



6. În clasele anterioare ați studiat interacțiunea dintre sarcinile electrice punctiforme și ați ajuns la concluzia că sarcinile electrice de același semn se resping, în timp ce sarcinile electrice de semn contrar se atrag. Fiecare sarcină exercită asupra celeilalte câte o forță, iar cele două forțe sunt egale și de sens contrar.

Observăm că în acest caz acțiunea și reacțiunea apar și în situația în care corpurile nu se află în contact.

Probleme rezolvate



1. De tavanul unei camere este suspendată o lustră cu masa $M = 5$ kg. O pisică cu masa $m = 1$ kg sare și se agață de lustră, dar în același moment lustra cade și atunci pisica se cațără pe lustră, astfel că rămâne față de podea la aceeași înălțime. Să se afle cu ce accelerație cade lustra.

Rezolvare

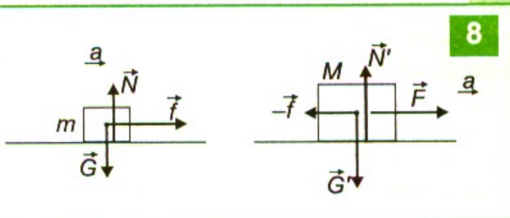
Deoarece pisica se află la aceeași înălțime față de podea, ea se află în repaus. Cum asupra ei acționează greutatea, înseamnă că mai trebuie să acționeze o forță vertical în sus F, astfel că rezultanta lor să fie nulă. 7 Această forță F este forța cu care lustra împinge pisica în sus $F = mg$. Conform principiului III, pisica împinge lustra în jos cu o forță egală. Asupra lustrei vor acționa simultan atât greutatea ei, cât și forța F. Conform principiului II pentru lustră:

$$F + G_{lustră} = Ma \Rightarrow mg + Mg = Ma$$

$$\Rightarrow a = g\frac{(M+m)}{M} = 12\ \text{m/s}^2$$

2. Pe o masă orizontală se află două corpuri în contact, cu masele $M = 3{,}5$ kg și $m = 1{,}5$ kg. Se împinge corpul M cu o forță $F = 10$ N, mișcarea corpurilor făcându-se fără frecare. Cu ce forță acționează corpul M asupra lui m?

Rezolvare



Reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp, **8** ținând cont că ambele corpuri vor avea o mișcare accelerată, cu o accelerație în sensul forței *F*.

Studiem mișcarea fiecărui corp: *f* este forța cu care corpul *M* îl împinge pe *m*.

Pentru corpul *m*:

pe *Ox* $f = m \cdot a$

Pentru corpul *M*:

pe *Ox*: $F - f = Ma$, deoarece corpul *m* reacționează asupra lui *M* cu o forță egală și de sens contrar.

Adunând cele două relații se obține

$$a = \frac{F}{m+M}$$

și apoi

$$f = \frac{mF}{m+F} = 3N \cdot$$

TESTE

La următoarele afirmații răspundeți cu A dacă afirmația respectivă este adevărată sau cu F dacă este falsă:

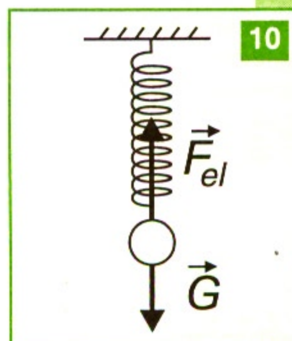
1. A F. Acțiunea și reacțiunea nu acționează niciodată asupra aceluiași corp.

2. A F. Mașina mai mare acționează cu o forță mai mare asupra mașinii mai mici. **9**



3. A F. Dacă pe un resort vertical așezat pe o masă se pune un corp, acest corp va fi în echilibru sub acțiunea propriei greutăți și a forței elastice exercitate de resort. Aceste forțe sunt acțiune și reacțiune.

4. A F. Forțele din figură sunt acțiune și reacțiune. **10**



Probleme

1. Găsiți proprietatea care nu este adevărată:
   a) acțiunea și reacțiunea sunt egale în modul;
   b) acțiunea și reacțiunea acționează pe aceeași direcție;
   c) acțiunea și reacțiunea imprimă accelerații egale corpurilor asupra cărora acționează;
   d) acțiunea și reacțiunea nu acționează niciodată asupra aceluiași corp.

2. Principiul III afirmă că:
   a) dacă asupra unui corp acționează o forță, aceasta imprimă corpului o accelerație invers proporțională cu masa corplui;
   b) în procesul interacțiunii dintre corpuri apar simultan mai două forțe egale în modul și opuse ca sens;
   c) sub acțiunea greutății corpurile cad în vid cu aceeași accelerație, independent de masa lor;
   d) un corp își păstează starea de mișcare rectilinie și uniformă sau de repaus dacă asupra lui nu acționează alte corpuri.

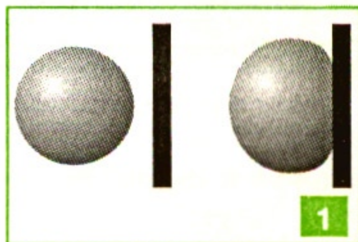
3. Două corpuri cu masele $m_1 = 1$ kg și $m_2 = 2$ kg sunt așezate pe un plan orizontal și se află în contact. Se acționează asupra corpului cu masa m_1 cu o forță $F = 10$ N sub un unghi $\alpha = 30°$ cu orizontala. Corpurile se deplasează fără frecare. Să se calculeze:
   a) accelerația cu care se deplasează sistemul de corpuri;
   b) forța cu care m_1 acționează asupra corpului m_2;
   c) valoarea forței F, astfel ca sistemul celor două corpuri să rămână în repaus.

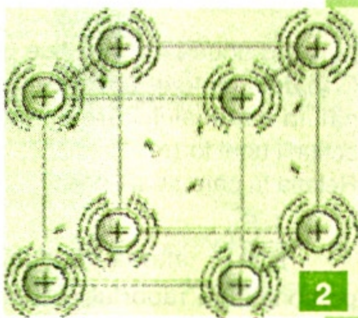
Dependența alungirii corpurilor de forța deformatoare, în domeniul elastic

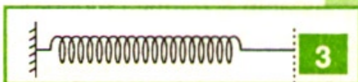
Forțele de deformare elastică de la contactul prin ciocnire a două corpuri sunt egale în modul și de sens opus, conform principiului III, dar noi observăm că deformațiile sunt diferite în cazul în care corpurile nu sunt din același material. 1 Corpurile au elasticități diferite, care depind de structura cristalină a acestora. 2

Acțiunea unei forțe asupra unui corp produce deformații sesizabile sau insesizabile. Noua stare de echilibru temporar în care ajunge un corp deformat elastic sub acțiunea forțelor exterioare se explică prin apariția unor forțe interioare care nu existau în corpul nedeformat. Deformația este perfect elastică în cazul în care corpul revine la forma și dimensiunile inițiale, după încetarea acțiunii forțelor exterioare. Modelul corpului elastic nu consideră deformațiile plastice remanente (care rămân după încetarea acțiunii forțelor deformatoare din exterior).

Un resort poate fi considerat corp elastic. 3


1


2


3

Experimental se constată că o bară sau o vergea de probă cu lungimea inițială L_0 și secțiune transversală de arie S, fixată la un capăt și supusă acțiunii unei forțe longitudinale F, se alungește până la lungimea L.

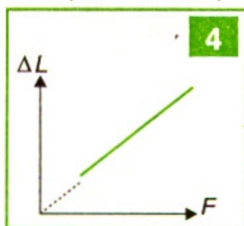
Alungirea absolută a barei, $\Delta L = L - L_0$, depinde de mărimea forței deformatoare, F, de aria secțiunii transversale, S, de lungimea inițială, L_0, și de materialul din care este confecționată bara.

a) Dacă acționăm asupra unei bare cu forțe diferite, constatăm că alungirea absolută variază direct proporțional cu forța deformatoare 4 $\Delta L \sim F$.

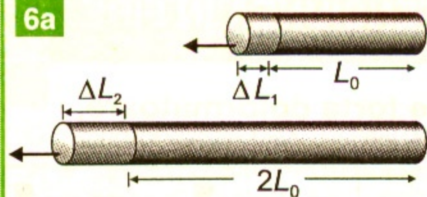
b) Dacă acționăm cu aceeași forță deformatoare, succesiv, asupra unor bare confecționate din același material, având lungimi inițiale egale, dar secțiuni transversale diferite, constatăm că alungirea absolută depinde invers proporțional de secțiunea barei 5.

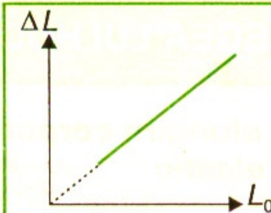
$$\Delta L \sim 1/S .$$

c) Menținând forța deformatoare aceeași și alegând bare din același material, cu aceeași secțiune, dar cu lungimi









inițiale diferite, graficul alungirii absolute ΔL indică o dependență direct proporțională de lungimea inițială a barei $\Delta L \sim \frac{FL_0}{S}$ **6a, 6b**.

Deci $\Delta L \sim \frac{FL_0}{S}$.

Alegând două bare identice ca formă, dar din materiale diferite, aplicând aceeași forță deformatoare, obținem alungiri absolute diferite. Acest lucru demonstrează că natura materialului are un rol hotărâtor în stabilirea deformației unui corp supus acțiunii unei forțe.

Relația la care se ajunge:

$\Delta L = \frac{1}{E}\frac{F}{S}L_0$ afirmă că alungirea absolută a barei $\Delta L = L - L_0$ este direct proporțională cu raportul F/S, numit efort unitar și cu lungimea inițială L_0, printr-o constantă E (numită modulul de elasticitate la alungire sau modulul lui Young), care depinde de natura materialului (vezi tabelul de mai jos).

Relația care exprimă **legea lui Hooke** se poate scrie:

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta L}{L_0}.$$

Notăm efortul unitar F/S cu litera σ (sigma – din alfabetul grec) și alungirea relativă cu litera ε (epsilon – din alfabetul grec), astfel că:

$$\sigma = \frac{F}{S} \text{ și } \varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}.$$

Obținem: $\sigma = E\varepsilon$.

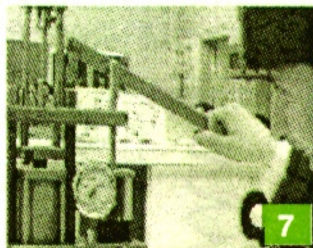
Material	E (N/m²)
Aluminiu	$7{,}0 \cdot 10^{10}$
Oțel	$2{,}0 \cdot 10^{11}$
Nichel	$2{,}1 \cdot 10^{11}$
Tungsten	$3{,}6 \cdot 10^{11}$
Sticlă	$5{,}5 \cdot 10^{10}$
Granit	$4{,}5 \cdot 10^{10}$
Beton armat	$2{,}0 \cdot 10^{11}$

Aceasta reprezintă o altă formă a **legii lui Hooke**: $F = kx$.

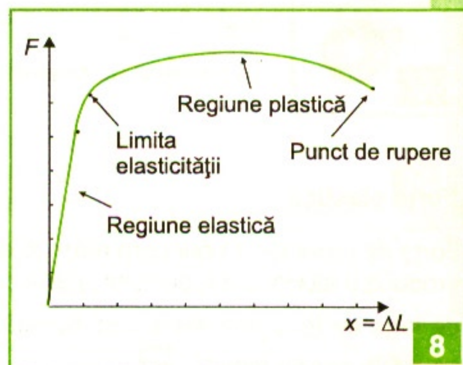
Unitatea de măsură pentru modulul de elasticitate la alungire (modulul lui Young):

$$[E]_{SI} = N/m^2.$$

Interpretarea diagramei dependenței efortului unitar de alungire relativă*



Pentru diferite materiale supuse deformărilor, cu ajutorul unei prese hidraulice, **7** se constată că alungirea ΔL verifică legea lui Hooke până la o anumită valoare a forței exterioare de deformație **8**. Dacă mărimea forței deformatoare crește, se atinge limita de proporționalitate, peste care corpul încetează să mai fie elastic (corpul păstrează o deformație permanentă după încetarea acțiunii forțelor exterioare). Peste această limită de elasticitate, bara se deformează plastic, se gâtuie și se rupe dacă se atinge punctul de rupere.



Aplicarea legii lui Hooke în câteva situații

1) Lifturile sunt prinse de cabluri de oțel. Forța de deformație este cea mai mare când liftul urcă accelerat sau coboară frânat, deoarece $F = m\,(a + g)$. Din această cauză, cablurile sunt calculate să reziste la efortul unitar admisibil în cablu (de exemplu, $\sigma = 117{,}6 \cdot 10^6 \dfrac{N}{m^2}$).

Exemplu de calcul

Dacă liftul cântărește 600 kg, iar masa maximă pe care o poate transporta este de 400 kg în condițiile în care liftul trebuie să transporte persoane până la etajul 12, considerând că un etaj are 3 m și că pe unitatea de lungime cablul cântărește 0,8 kg/m, secțiunea cablului se calculează, dacă se presupune că liftul are la pornire accelerația $a = 2\ m/s^2$ ($g = 10\ m/s^2$).

$$F = m_t\,(a + g).$$

$$\left.\begin{aligned} m_t &= m_{\text{lift}} + m_{\text{persoane}} + m_{\text{cablu}} \\ m_{\text{cablu}} &= 0{,}8 \cdot 12 \cdot 3 = 28{,}8\,\text{kg} \end{aligned}\right\} \rightarrow m_t = 1028{,}8\,\text{kg}$$

$$S = \frac{F}{\sigma_a} = \frac{m_t(a+g)}{\sigma_a} = 1{,}05\,\text{cm}^2$$

2) La podurile metalice, datorită dilatărilor foarte mari din timpul verii, pot apărea eforturi unitare uriașe. Din această cauză, un capăt al podului nu se fixează, ci alunecă pe role.

3) Între șinele de tramvai sau de tren există spații, deoarece vara, lungimea lor crește datorită dilatărilor, iar forțele de deformare calculabile cu legea lui Hooke ar determina deformarea lor.

4) Datorită acelorași dilatări, care duc la mărirea lungimii, țevile de apă caldă prezintă coturi pentru ca deformarea lor să fie controlată.

Generalizarea rezultatelor observațiilor experimentale în enunțul legii lui Hooke


9

Putem să exprimăm forțe exterioare care produc deformații elastice astfel:

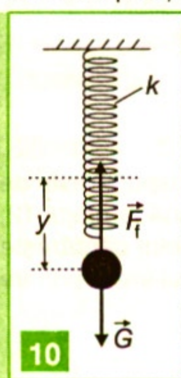
$$F = \frac{E \cdot S}{L_0} \Delta L \text{ sau } F = K_{mec} \Delta L,$$

unde $k = \frac{E \cdot S}{L_0}$ reprezintă constanta de elasticitate,

cu unitatea de măsură $[k]_{SI} = N/m$.

Forța elastică

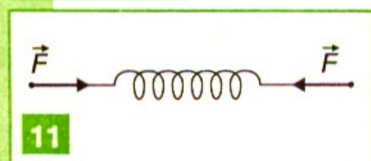
Forța de greutate a unui corp atârnat la capătul liber al resortului unui dinamometru produce o alungire a resortului , până când această forță de greutate este echilibrată de forța de tensiune din resort, numită forță elastică. 9 Înlăturând corpul, resortul revine la poziția inițială. 10



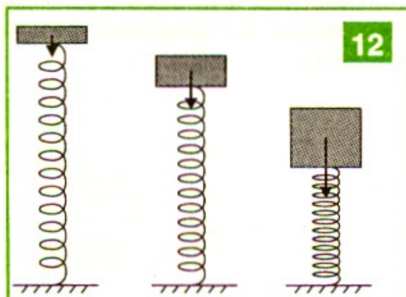
10

Dacă strângem cu mâna un arc, îi micșorăm lungimea, adică îl comprimăm. După ce luăm mâna, resortul revine la poziția avută inițial, când era nedeformat.

Forța elastică este forța care tinde să readucă un corp în stare nedeformată, opunându-se deformației.



11


12


13

În oricare stare de echilibru ajunge un resort deformat elastic, alungit sau comprimat **12** sub acțiunea forțelor exterioare, apare o forță interioară elastică F_e, pe aceeași direcție, egală în modul cu forța deformatoare, dar opusă ei, care o echilibrează.

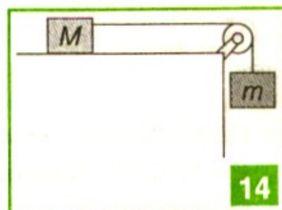
În relația $\vec{F}_e = -k\vec{x}$ semnul „–" ne arată că forța elastică se opune deformației, iar $x = \Delta L = L - L_0$ reprezintă deformația.
Într-un resort elastic, forțele de tensiune elastică sunt proporționale cu deformațiile respectivului resort și sunt orientate în sens opus deformațiilor. Cu ajutorul resorturilor s-au confecționat dinamometrele. Acestea sunt instrumente destinate măsurării directe a forțelor și se bazează pe efectele de deformare pe care le produc forțele.

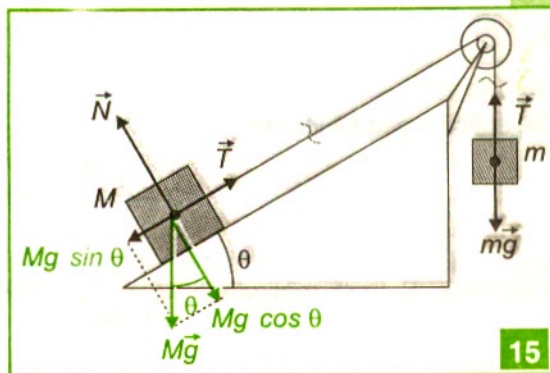
Dinamometrele sunt prevăzute cu o scală gradată în newtoni. **13**

Utilizarea tensiunii pentru stu ul interacțiunii dintre corpurile legate prin fir

Forțele de întindere în fire se numesc forțe de tensiune sau tensiuni în fire. Interacțiunea mecanică dintre corpuri poate fi:

– prin legături în fire „inextensibile" (acționează tensiuni care au sensul alungirii aparente a firului; un „fir inextensibil" este, în realitate, un fir foarte puțin extensibil).
– prin legături elastice în resorturi elastice (acționează forțe de tensiune elastică proporționale cu alungirile respectivului resort);
– prin contact direct (când se ciocnesc elastic, acționează forțe mari în intervale de timp mici – fracțiuni de secundă – care modifică brusc direcția și viteza de deplasare a corpurilor);
– prin intermediul unui câmp fizic (interacțiunea între corpuri se produce la distanță, de exemplu, prin câmp gravitațional).





Dacă tragem un corp, așezat pe o suprafață orizontală, prin intermediul unui fir inextensibil de masă neglijabilă, se poate considera că firul transmite corpului forța exercitată asupra lui din exterior. **14** În firul supus întinderii, facem două tăieturi imaginare în două puncte oarecare și figurăm forțele pereche acțiune-reacțiune (egale și de sens opus). Forțele de tensiune sunt îndreptate către tăieturile imaginare. **15**
Părțile unui fir întins, de masă neglijabilă, situate de o parte și de alta a unui punct de pe fir, exercită una asupra celeilalte forțe egale și de sens opus, orientate de-a lungul firului. Fiecare dintre aceste două forțe se numește tensiune. Tensiunea într-un punct al firului poate fi măsurată cu ajutorul unui dinamometru inserat în punctul respectiv.

Dacă analizăm un corp atârnat de un fir ideal (inextensibil și fără masă), subsistemul format de corp și porțiunea de fir până la tăietură este supus acțiunii forței de greutate mg a corpului și forței de tensiune T din fir. 14

Pentru a separa un corp de restul sistemului, forțele de tensiune sunt îndreptate de la corpul considerat către tăietura considerată, în cazul întinderii unui fir, resort, tijă, vergea. Forțele de tensiune sunt îndreptate de la tăietura considerată către corpul considerat, în cazul comprimării unui resort, tijă, vergea. Firul nu poare fi supus comprimării.

Probleme rezolvate

1. Un corp cu masa $m = 2$ kg, aflat inițial în repaus pe o suprafață orizontală, este legat de un resort elastic care are constanta $k = 40$ N/m și se alungește cu $x = 10$ cm. Să se afle accelerația corpului, dacă mișcarea se face fără frecare.

Rezolvare

$$F_{el} = ma \Rightarrow kx = ma \Rightarrow a = 2 \text{ m/s}^2.$$

2. O bară de oțel cilindrică cu lungimea $l_0 = 20$ m și care are modulul de elasticitate $E = 1{,}96\ 10^{11}$ N/m^2 este supusă întinderii de către o forță $F = 100$ N și prin urmare se alungește cu $\Delta l = 0{,}5$ mm. Ce rază are bara și ce efort unitar se creează în bară ?

Rezolvare

Se aplică legea lui Hooke:

$$\frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l_0} \Rightarrow S = \frac{Fl_0}{E\Delta l}.$$

Deoarece $S = \pi r^2$, obținem $r = \sqrt{\frac{Fl_0}{\pi E \Delta l}} = 2{,}55\,\text{mm}$; $\sigma = \frac{F}{S} = E\frac{\Delta l}{l_0} = 4{,}9 \cdot 10^6\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$.

Notații științifice

Dacă în urma efectuării unui calcul obținem un număr cu multe zecimale,trebuie să folosim notația științifică și unitatea de măsură, în sistemul de unități SI.

Exemple:

- Valoarea numerică 17 se scrie $1{,}7\cdot10^1$;
- Valoarea numerică 1,7 se scrie $1{,}7\cdot10^0$;
- Valoarea numerică 0,17 se scrie $1{,}7\cdot10^{-1}$;
- Valoarea numerică 1700 se scrie $1{,}7\cdot10^3$;

– Valoarea numerică 170000000 se scrie $1{,}7 \cdot 10^8$;
– Valoarea numerică 0,0000231 se scrie $2{,}31 \cdot 10^{-5}$;
– Raportul valorilor numerice 170000000 și 0,0000231 este mai ușor de calculat prin raportul valorilor $1{,}7 \cdot 10^8 / 2{,}31 \cdot 10^{-5} = 7{,}4 \cdot 10^{12}$;
– Greșim dacă nu scriem ordinul de marime ca exponent, de exemplu: 1,7·10 5.

Probleme

1. Mărimea fizică măsurată în N/m este:
   a) forța;
   b) accelerația;
   c) constanta elastică a unui resort;
   d) viteza.

2. Unitatea de măsură pentru alungirea relativă este:
   a) Nm^{-1};
   b) adimensional;
   c) Nm;
   d) Nm^{-2}.

3. La dublarea efortului unitar aplicat unei anumite bare, alungirea relativă va fi, în limitele de valabilitate ale legii lui Hooke, față de cea inițială:
   a) de patru ori mai mare;
   b) nu se va schimba;
   c) dublă;
   d) de două ori mai mică.

4. Un tren aflat în mișcare accelerată trage vagoanele. Forța elastică în resorturile care leagă vagoanele:
   a) are aceeași valoare;
   b) scade de la locomotivă spre capătul trenului;
   c) crește de la locomotivă spre capătul trenului;
   d) scade de la locomotivă spre mijlocul trenului, după care crește.

5. Un fir cu aria secțiunii transversale $S = 2$ mm² se alungește sub acțiunea unei forțe longitudinale deformatoare $F_1 = 1000$ N. Efortul unitar are valoarea:
   a) $5\ 10^3$ N/m²;
   b) $5\ 10^4$ N/m²;
   c) $5\ 10^5$ N/m²;
   d) $5\ 10^6$ N/m².

6. Un corp cu masa $m = 6$ kg se află pe un plan orizontal pe care se poate mișca fără frecare. Corpul este prins de un fir cu un alt corp cu masa $M = 4$ kg, care este trecut peste un scripete și atârnă vertical. Dacă în fir este inserat un resort cu constanta elastică $k = 150$ N/m, alungirea resortului este:
   a) 16 cm;
   b) 8 cm;
   c) 20 cm;
   d) 2 cm.

LEGILE FRECĂRII LA ALUNECARE

Redescoperirea pe cale experimentală a legilor frecării la alunecare

În ce caz un corp aruncat de-a lungul unei suprafețe orizontale ar trebui să se miște rectiliniu și uniform ? Primul principiu al mecanicii susține că un corp se mișcă rectiliniu și uniform dacă asupra lui nu acționează nici o forță sau dacă forța rezultantă asupra corpului este nulă. Forțele de frecare la frânare se opun deplasării corpului considerat și din această cauză corpul se va mișca încetinit până la oprire. Vom considera deocamdată frecarea la alunecare între corpuri solide aflate în contact.

Interacțiunea de contact între corpuri se caracterizează prin forțe de reacțiune normale sau tangențiale la suprafețele de contact între acestea. Forțele de frecare sunt stânjenitoare, dar sunt și benefice. Mersul pe sol al oamenilor și animalelor, rularea și frânarea vehiculelor pe un drum sau altul sunt dependente de forțele de frecare. Ele se opun tendinței de mișcare relativă sau mișcarii relative a unui corp față de celălalt: de înaintare sau de rămânere în urmă față de alt corp sau sistem de corpuri cu care este în contact.

Forțele de frecare între două corpuri sau sisteme de corpuri aflate în contact sunt reciproce. **1**

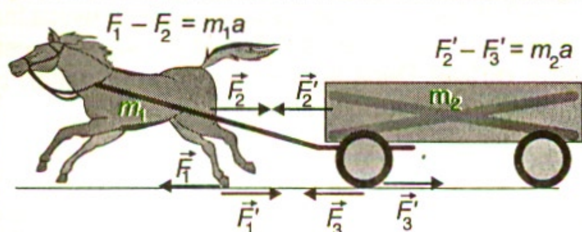
Experimente

Așezăm un corp de masă *M* pe un plan orizontal. Prindem de el un fir inextensibil de care tragem prin intermediul unui resort. Forța indicată de resort este o forță de tracțiune. Când corpul se mișcă uniform, $F_{tracțiune} = F_{f\ alunecare}$.

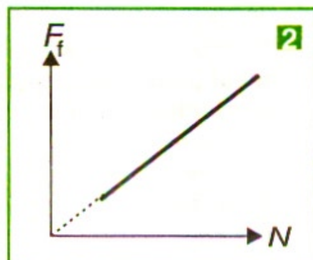
Se așază pe corpul considerat diferite corpuri, astfel că apăsarea normală $N = G$ se modifică. Reprezentând grafic forța de frecare la alunecare $F_{alunecare}$ în funcție de apăsarea normală, obținem graficul **2**, ceea ce ne arată că forța de frecare la alunecare este direct proporțională cu apăsarea normală.

Dacă alegem un corp paralelipipedic prelucrat identic pe toate fețele, vom constata că, indiferent de fața pe care este pus corpul, forța de frecare la alunecare în cazul mișcării rectilinii uniforme va avea aceeași valoare, deci nu depinde de aria de contact dintre corpuri.

Alegând două corpuri din lemn cu aceeași formă și masă, dar prelucrate diferit, vom constata că, deși forțele de apăsare normală au aceeași valoare, dacă așezăm



1



2

corpurile pe fețe identice, forțele de frecare la alunecare vor fi diferite. Prin urmare forțele de frecare la alunecare depind de modul de prelucrare al suprafețelor corpurilor aflate în contact.

Concluzie

Forța de frecare la alunecare (cinetică) se opune mișcării și:
- este tangentă la suprafața de contact dintre corpurile care se deplasează unul față de altul;
- este proporțională cu mărimea forței de apăsare normală pe suprafață (egală cu mărimea forței de reacțiune normală N pe suprafață) și este independentă de aria suprafeței de contact;
- este dependentă de natura suprafețelor de contact (natura chimică și gradul de prelucrare a suprafețelor) printr-un coeficient numit coeficient de frecare cinetică.

Formula forțelor de frecare la alunecare:

$$F_{fc} = \mu_c N,$$

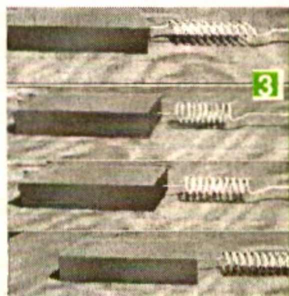
unde μ_c este coeficientul de frecare cinetică.
Relația nu poate fi scrisă vectorial, deoarece forța de frecare cinetică și forța normală nu au aceeași direcție.

Diferența dintre frecarea statică și frecarea cinetică

Experiment

Dacă tragi un corp, așezat pe suprafața plană și orizontală a altui corp, prin intermediul unui dinamometru, vei observa că acest corp rămâne în repaus, cu toate că valorile F_1 ale forței de tracțiune, citite pe scala dinamometrului, cresc de la valoarea zero până la o valoare maximă F_2 când corpul începe să se miște. Înseamnă că la suprafața de contact dintre corp și suportul orizontal considerat acționează forța de frecare statică $\vec{f}_{fs}$ egală și de sens opus cu forța de tracțiune $\vec{F}_1$. **3**

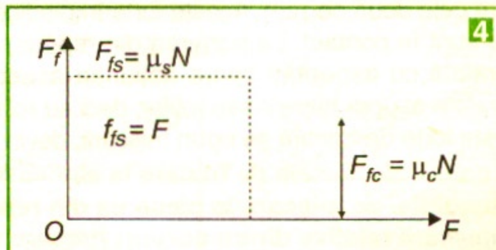
Forța de frecare statică se opune tendinței de mișcare a corpului și atinge valoarea maximă $F_{fs} = F_2$. Ea este:
- proporțională cu mărimea forței de apăsare normală pe suprafață (egală cu N – mărimea forței de reacțiune normală pe suprafață) și practic independentă de aria suprafeței de contact;
- dependentă de natura suprafeței de contact (natura chimică și gradul de prelucrare a suprafeței de contact) printr-un coeficient numit coeficient de frecare statică.

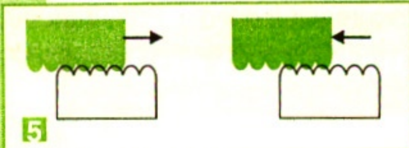

3

Formulele forțelor de frecare statice sunt:

$$f_{fs} = \mu_s N$$

respectiv $F_{fs} = \mu_s N$, unde F_{fs} este valoarea maximă a forței de frecare statică. **4**
În momentul în care forța de tracțiune are valori $F > \mu_s N$, corpul începe să se miște





accelerat și ulterior, dacă reducem forța de tracțiune la o valoare egală cu mărimea forței de frecare cinetică, $F = F_{fc} = \mu_c N$, se va mișca uniform. În cazul alunecării relative cu viteză constantă, între corpurile aflate în contact acționează forțele de frecare la alunecare (cinetice). Se constată experimental că valoarea coeficientului de frecare cinetică este mai mică decât valoarea coeficientului de frecare statică, pentru aceleași două corpuri aflate în contact (vezi tabelul de mai jos).

Materiale în contact	Coeficientul static μ_s	Coeficientul cinetic μ_c
Oțel pe oțel	0,74	0,57
Aluminiu pe oțel	0,61	0,47
Cupru pe oțel	0,53	0,36
Alamă pe oțel	0,51	0,44
Zinc pe fier	0,85	0,21
Cupru pe fier	0,95	0,29
Sticlă pe sticlă	0,94	0,40

Valorile coeficienților de frecare se pot afla din tabele sau se determină experimental. Suprafețele corpurilor prezintă denivelări microscopice, oricât de bine șlefuite ar fi. Suprafața reală de contact (privită la microscop) dintre două corpuri aflate în contact este foarte mică. Forța de frecare cinetică este direct proporțională cu suprafața reală de contact dintre corpuri și din această cauză, cu cât forța de apăsare normală este mai mare, cu atât forța de frecare cinetică va fi mai mare. Când un corp alunecă pe alt corp neregularitățile microscopice se rup și se formează continuu altele noi. La rostogolire, aceste neregularități microscopice sunt doar presate și nu sunt rupte, de aceea forța de frecare la rostogolire este mult mai mică.

Datorită întrepătrunderii neregularităților microscopice ale corpurilor explicăm existența forțelor de frecare înainte de plecarea corpurilor, adică a forțelor de frecare statică. 5
Analizează deplasarea relativă a două perii care se întrepătrund parțial. Când două corpuri se află în contact, forțele de apăsare normală produc tasări, întrepătrunderi și „suduri" pe suprafața de contact.

Analiza rolului frecării în activitatea cotidiană și în tehnică

Forțele de frecare la alunecare apar la suprafața de contact dintre două corpuri odată cu tendința de deplasare relativă a unuia față de celălalt și acționează asupra fiecăruia dintre cele două corpuri. Aceste forțe împiedică alunecarea corpurilor față de cele cu care sunt în contact. La pornirea din repaus, la mersul uniform sau accelerat pe o suprafață cu asperități apare acțiunea acestor forțe de frecare din partea acelei suprafețe asupra tălpilor sau roților, deci au rol de forțe de antrenare sau de tracțiune. Aceste forțe de frecare se opun mișcării, devin forțe rezistive.

În concluzie, forțele de frecare la alunecare se opun:

– tendinței de mișcare la plecarea din repaus (frecarea statică);

– mișcării relative dintre corpuri (frecare cinetică).

Pentru o deplasare relativă a unui corp față de alt corp este necesară acțiunea unei forțe de frecare. Sunt utile în unele cazuri cum ar fi: mersul oamenilor și al animalelor, prinderea unor obiecte, transmiterea mișcării mecanice prin curele, efectuarea nodurilor.

În alte cazuri, forțele de frecare sunt dăunătoare și trebuie diminuate. De exemplu în cazul pieselor în mișcare, forțele de frecare cinetică produc încălziri ale corpurilor, putând duce la distrugerea lor prin supraîncălzire.

O metodă de diminuare a forțelor de frecare la alunecare este înlocuirea mișcării de translație cu cea de rotație. Din această cauză vehiculele folosesc roți. (Roata a fost descoperită în Egiptul antic). 6

Când un corp este deplasat pe role sau este montat pe un sistem cu roți (deblocate), efortul este mai mic decât la deplasarea lui prin alunecare cu roțile blocate. Forțele de frecare la alunecare sunt astfel înlocuite cu forțele de frecare la rostogolire, mult mai mici din cauza valorii mici a coeficientului de frecare.

6a

6b

Rulmenții cu bile sau cu role se utilizează pentru a reduce frecările în lagărele în care se rotesc osii sau arbori (cum este cazul arborelui cotit de la motorul autovehiculului).

Forțele de frecare la alunecare se reduc și cu lubrefianți, uleiuri sau unsori, care umplu denivelările microscopice, deoarece în acest caz se înlocuiește frecarea solid-solid, cu frecarea solid-lichid, care este mult mai mică.

Există frecare nu numai între corpurile solide, ci și între corpurile lichide, în cazul când un strat de fluid alunecă peste alt strat de fluid, precum și la înaintarea unui solid în lichid. Frecare întâmpină solidele și în aer. Pentru ca un avion să înainteze, trebuie să-i funcționeze motorul pentru a anihila forțele de frecare.

Aplicarea legilor frecării la alunecare în câteva situații

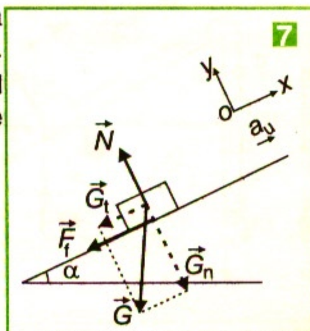
Considerații teoretice

Metodă generală de rezolvare a problemelor:

- reprezentăm forțele care acționează asupra fiecărui corp;
- scriem principiul suprapunerii forțelor pentru fiecare corp în parte;
- ne alegem un sistem de coordonate convenabil pentru fiecare corp și apoi proiectăm ecuațiile vectoriale, obținând ecuații scalare;
- se rezolvă apoi sistemul de ecuații.

Probleme rezolvate

1. Pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 60°$ se aruncă de-a lungul planului un corp cu viteza inițială $v_0 = 10$ m/s. Mișcarea se face cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu = 0{,}1$. Să se afle cu ce accelerație urcă corpul pe planul înclinat. ($g = 10$ m/s²) 7

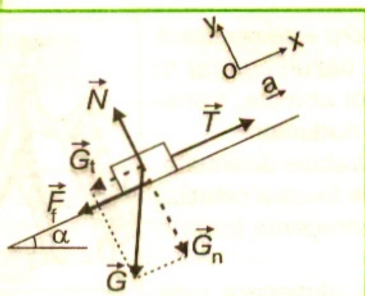


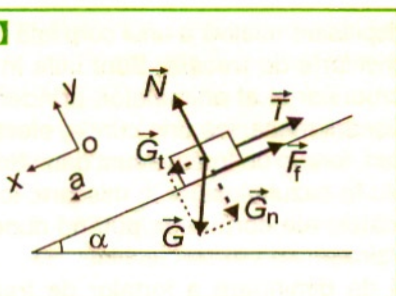
Rezolvare

$$Ox: \quad -mg\sin\alpha - F_f = m\,a_u$$

$$Oy: \quad N - mg\cos\alpha = 0$$

$$F_f = \mu N \Rightarrow a_u = -g\,(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = -9{,}16\ \text{m/s}^2\ .$$





Semnul „–" al accelerației ne arată că acest corp are o mișcare rectilinie uniform încetinită.

Caz I Urcare pe plan înclinat

2. Fie un corp cu masa $m = 2$ kg, care se află pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 30°$.

Mișcarea corpului se face cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu = \frac{1}{2\sqrt{3}}$.

Se acționează asupra corpului prin intermediul unui fir în care tensiunea este:

a) $T = 20$ N;

b) $T = 3$ N.

În ce sens și cu ce accelerație se mișcă corpul ? ($g = 10$ m/s^2)

Rezolvare

a) Pe Ox, deoarece $T > mg \sin\alpha$, corpul se va deplasa în sus. 8

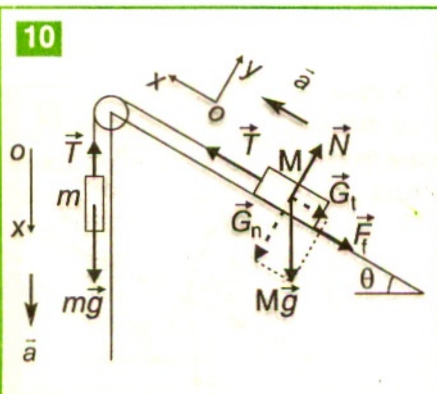
Aplicând legea de compunere a mai multor forțe concurente, obținem:

$$\left.\begin{aligned} pe\ Ox &: T - mg\sin\alpha - F_f = ma \\ pe\ Oy &: N - mg\cos\alpha = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a = \frac{T - mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha}{m} = 2{,}5\,\text{m/s}^2$$

$$F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha$$

b) Pe Ox, deoarece $T <$ mgsinα, corpul se va mișca în jos cu accelerația 9.

$$a = \frac{mg\sin\alpha - T - \mu mg\cos\alpha}{m} = 1\,\text{m/s}^2$$



3. Un corp cu masa $M = 2$ kg este așezat pe un plan înclinat cu unghiul $\theta = 30°$ și se poate mișca cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. De corp este legat un fir inextensibil trecut peste un scripete ideal aflat în vârful planului înclinat și de care se leagă un corp cu masa $m = 2$ kg. ($g = 10$m/s^2) 10.

Să se afle:

a) accelerația cu care urcă corpul pe plan;

b) tensiunea în fir;

c) reacțiunea în axul scripetelui.

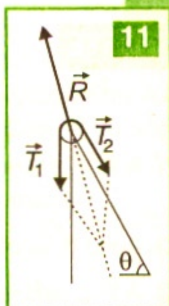
Rezolvare

a) Pentru corpul cu masa m,

$$\text{pe } Ox: mg - T = ma \ (1)$$

Pentru corpul cu masa M: $\begin{cases} Ox: & T - Mg\sin\theta - F_f = Ma \\ Oy: & N - mg\cos\theta = 0 \\ & F_f = \mu N \end{cases}$

Din aceste ecuații obținem: $T - Mg\sin\theta - \mu Mg\cos\theta = Ma$



Obținem $a = g\dfrac{m - M(\sin\theta + \mu\cos\theta}{m + M} = 1{,}25\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

b) $T = m(g - a) = \dfrac{mMg(1 + \sin\theta + \mu\cos\theta)}{M + m} = 17{,}5\ \text{N}$.

c) Deoarece scripetele nu se află în mișcare de translație, trebuie ca rezultanta forțelor să fie nulă. **11**

$$\vec{T_1} + \vec{T_2} + \vec{R} = 0 \Rightarrow \vec{R} = (-\vec{T_1} - \vec{T_2})$$
$$R^2 = T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2\cos(90 - \theta)$$

Cum $T_1 = T_2 = T \Rightarrow R = T\sqrt{2(1 + \sin\theta)} = 30{,}31\ \text{N}$.

Caz II Coborâre pe plan înclinat

Se lasă liber un corp pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 45°$. Mișcarea acestuia se face cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu = 0{,}2$. Să se afle cu ce accelerație coboară corpul pe planul înclinat. ($g = 10\ \text{m/s}^2$) **12**

$$pe\ \ Ox: \ mg\sin\alpha - F_f = ma_c$$
$$pe\ \ Oy: \ N - mg\cos\alpha = 0$$

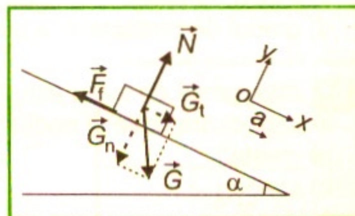
Cum $F_f = \mu N \Rightarrow a_c = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) = 5{,}64\ \text{m/s}^2$.

Corpul coboară uniform accelerat.

Coborârea în mișcare uniformă pe plan în jos în absența forțelor de tracțiune se obține pentru $a_c = 0$: $mg \cdot \sin\alpha = \mu mg \cdot \cos\alpha$, deci $\text{tg}\alpha = \mu$. Unghiul de frecare α este unghiul pentru care corpul coboară uniform pe planul înclinat și a cărui tangentă este egală cu coeficientul de frecare:

$$\text{tg}\alpha = \frac{\mu N}{N} = \mu.$$

Dacă unghiul planului înclinat este mai mic decât unghiul de frecare, corpul rămâne în echilibru pe plan; dacă unghiul planului înclinat este mai mare decât unghiul de frecare, corpul coboară accelerat.



TESTE

La următoarele afirmații răspundeți cu A dacă afirmația respectivă este adevărată sau cu F dacă este falsă:

1. A F. În planul de contact dintre două corpuri există întotdeauna două forțe de frecare, care se opun mișcării relative a unui corp față de celălalt.
2. A F. Forța de frecare cinetică este mai mare decât forța de frecare statică.
3. A F. Coeficientul de frecare la alunecare depinde de gradul de prelucrare al suprafețelor corpurilor aflate în contact.
4. A F. Forța de frecare la alunecare este dependentă de aria suprafeței de contact dintre corpuri.
5. A F. Unghiul unui plan înclinat pentru care un corp se mișcă uniform se numește unghi de frecare.
6. A F. Datorită forței de frecare putem merge.
7. A F. În aer, corpurile care cad de la aceeași înălțime ajung la sol simultan.
8. A F. Pe o planetă fără atmosferă, corpuri apropiate care cad de la aceeași înălțime ajung la suprafața planetei simultan.

Probleme

1. Un paralelipiped din lemn are fețele prelucrate diferit. Frecarea este mai mare pe fața:
   a) cea mai bine șlefuită;
   b) cea șlefuită intermediar;
   c) cea mai rugoasă;
   d) toate fețele au aceeași frecare.

2. Forța de frecare la alunecare nu depinde de:
   a) masa corpului;
   b) aria suprafeței de contact;
   c) coeficientul de frecare;
   d) gradul de prelucrare al suprafețelor aflate în contact.

3. Forța de frecare la alunecare dintre un corp și planul pe care se mișcă este dependentă de:
   a) forța de tracțiune ce acționează asupra corpului;
   b) suprafața de contact dintre corp și plan;
   c) viteza corpului;
   d) gradul de prelucrare al suprafețelor.

4. O cutie goală de lemn este trasă pe podea. Dacă se umple cutia, coeficientul de frecare dintre cutie și podea:
   a) crește;
   b) scade;
   c) rămâne același;
   d) crește și apoi scade.

5. O mașină cu masa m = 800 kg se deplasează pe orizontală cu frecare și cu accelerația $a = 2 m/s^2$. Dacă forța de frecare reprezintă 20% din valoarea forței de tracțiune, valoarea forței de tracțiune este:

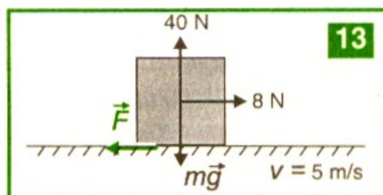
a) 1600 N; c) 2000 N;
b) 1333 N; d) 320 N.

6. Pentru a pune în mișcare o mașină cu masa $m = 500$ kg, care nu poate porni, acționează doi oameni care împing cu forțele $F_1 = 235$ N și $F_2 = 195$ N. Mașina întâmpină forță de frecare cu solul de 300 N. Accelerația mașinii va fi:

a) $0{,}26\ m/s^2$; c) $0{,}2\ m/s^2$;
b) $0{,}1\ m/s^2$; d) $0{,}6\ m/s^2$.

7. Forța de frecare cinetică și valoarea coeficientului cinetic din reprezentarea grafică alăturată **13** este:

a) $F_f = 8$ N, $\mu = 0{,}2$; c) $F_f = 4$ N, $\mu = 0$;
b) $F_f = 40$ N, $\mu = 0{,}1$; d) $F_f = 0$ N, $\mu = 0$.



8. Un corp cu masa $m = 4$ kg se mișcă pe un plan orizontal sub acțiunea unei forțe F = 22 N și imprimă corpului o accelerație $a = 2\ m/s^2$. Forța de frecare cinetică și valoarea coeficientului cinetic au valorile:

a) $F_f = 22$ N, $\mu = 0{,}55$; c) $F_f = 14$N, $\mu = 0{,}35$ M;
b) $F_f = 8$ N, $\mu = 0{,}2$; d) $F_f = 40$ N, $\mu = 0{,}3$.

9. Pentru a pune în mișcare un corp cu masa $m = 2$ kg, aflat pe o suprafață orizontală trebuie să acționăm cu o forță minimă F, care face cu orizontala un unghi $\alpha = 30°$. Cunoscând valoarea coeficientului de frecare $\mu = 0{,}1$, valoarea forței F pentru care corpul pornește este:

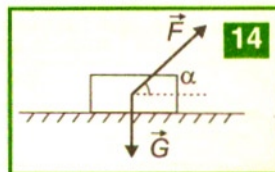
a) 1,74 N; b) 2,27 N; c) 2,18 N; d) 3,5 N.

10. Pe o scândură orizontală se află un corp. Scândura începe să se încline și când unghiul făcut de scândură cu orizontala este de 45° corpul începe să alunece uniform. Coeficientul de frecare dintre corp și scândură este:

a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

11. Un corp cu greutatea G așezat pe un plan orizontal este tras cu frecare, cu o forță care formează unghiul $\alpha = 60°$ cu orizontala. **14** Aflați valoarea forței F, știind că acest corp se mișcă orizontal cu accelerația $a = \frac{2g}{\sqrt{3}}$ și coeficientul de frecare la alunecare este $\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}$:

a) $F = \frac{G}{\sqrt{3}}$; b) $F = \sqrt{3}G$; c) $F = \frac{\sqrt{3}}{2}G$; d) $F = \frac{\sqrt{3}}{4}G$.



12. Un corp cu $m = 1$ kg coboară pe un plan înclinat ce are unghiul $\alpha = 30°$ și lungimea de $l = 5$ m cu frecare coeficientul de frecare fiind $\mu = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. Să se calculeze: ($g = 10$ m/s^2).

a) cu ce accelerație coboară corpul pe planul înclinat?

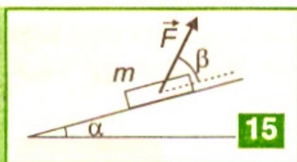
b) care este valoarea forței necesare pentru a urca uniform corpul pe planul înclinat, dacă $\beta = 45°$ **15** ?

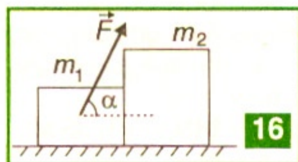
13. Două corpuri cu masele $m_1 = 1$ kg și $m_2 = 2$ kg sunt așezate pe un plan orizontal și se află în contact. Se acționează asupra corpului cu masa m_1 cu o forță $F = 40$ N sub un unghi $\alpha = 60°$ cu orizontala **16**. Corpurile se pot deplasa cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu = 0{,}1$.Să se calculeze: ($g = 10$ m/s^2).

a) accelerația cu care se deplasează sistemul de corpuri;

b) forța cu care m_1 acționează asupra corpului m_2;

c) valoarea forței F astfel ca sistemul celor două corpuri să rămână în repaus.

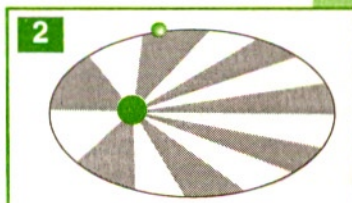




14. Analizați notațiile și simbolurile uzuale în formule, unități de măsură sau prefixe. Arătați eventualele neconcordanțe.

Notații	Mărime fizică reprezentată	Simbol pentru unități de măsură sau prefix – multiplu sau submultiplu în SI
m	masă	metru - pentru unitatea de măsură a lungimilor în sistemul internațional SI
kg		kilogram - pentru unitatea de măsură a maselor în sistemul internațional SI
s	Spațiu, lungime	secunda - pentru unitatea de măsură a duratelor în sistemul internațional SI
T	forță de tensiune sau temperatură absolută	10^{12} prefix - tera
G	greutate	10^{9} prefix - giga
M	masă	10^{6} prefix - mega
k	constantă elastică	10^{3} prefix - kilo
m	masă	10^{-3} prefix - mili
μ	coeficient de frecare	10^{-6} prefix - micro
n		10^{-9} prefix - nano
p	Impuls sau presiune	10^{-12} prefix - pico





Istoric

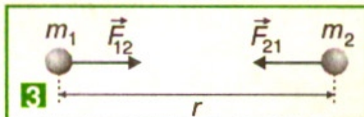
N. Copernic (în 1543) lansează teoria că Soarele este o stea, iar Pământul, ca și celelalte planete, se rotește în jurul Soarelui pe orbite circulare. **1** Această teorie heliocentrică a fost susținută de Galileo Galilei, care face observații astronomice cu ajutorul lunetei construite de el. După analiza propriilor observații sau a celor făcute de alți astronomi asupra mișcării planetelor, Johannes Kepler stabilește următoarele legi:

1. Traiectoriile planetelor sunt elipse, care au Soarele într-unul dintre focarele acestora (elipsa are proprietatea că orice punct de pe elipsă are suma distanțelor la cele două focare ale elipsei constantă).
2. Vectorul de poziție al unei planete *P* față de Soare *S* ($\vec{r}_{SP} = \vec{r}$) descrie arii egale în intervale de timp egale. **2**
3. Pătratele perioadelor de revoluție (de mișcare ale planetelor pe o traiectorie completă în jurul Soarelui) sunt proporționale cu cuburile semiaxelor mari ale elipselor descrise.

Aceste legi empirice descriu mișcarea planetelor, fără a spune ceva despre forțele care produc mișcările lor.
Isaac Newton a dedus **legea atracției universale** din legile lui Kepler, pe baza principiilor fundamentale ale dinamicii (în lucrarea *Principiile matematice ale filosofiei naturale,* în anul 1687).
Toate corpurile din Univers se atrag cu forțe care depind de masele corpurilor și de distanța dintre ele.

Deoarece elipsele descrise de planete au cele două semiaxe comparabile ca ordin de mărime, considerăm o planetă de masă *m* care descrie o traiectorie circulară cu raza *r*, în jurul Soarelui de masă *M*. Forța centripetă care menține planeta în mișcare în jurul Soarelui este forța de atracție gravitațională dintre aceste două corpuri cu masele *m*, respectiv *M* și cu distanța între centrele lor egală cu *r*. Dimensiunile unei planete sunt mici în comparație cu distanța *r* dintre centrul ei și al Soarelui. Conform acestei legi **a atracției universale**, toate corpurile din Univers interacționează prin forțe de atracție.

Forța de atracție universală (gravitațională) dintre două corpuri sferice (considerate puncte materiale cu masa concentrată în centrul lor) este direct proporțională cu produsul maselor acestora, $m_1 \cdot m_2$ și invers proporțională cu pătratul distanței *r* dintre centrele lor. **3**



Expresia vectorială: $\vec{F} = -K\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$. Scalar: $F = K\frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$,

unde K este constanta atracției gravitaționale (universale).

Constanta atracției gravitaționale, $K = 6,67 \cdot 10^{-11} Nm^2/kg^2$, este numeric egală cu forța cu care se atrag două corpuri punctiforme, având masele egale cu 1 kg, plasate la distanța r = 1m unul de celălalt. Valoarea constantei atracției universale a fost măsurată de Cavendish. Legea atracției universale nu implică contact fizic între corpurile care interacționează. Conform principiului acțiunii și reacțiunii, cele două forțe sunt egale în modul, dar produc efecte diferite datorită faptului că masele corpurilor sunt diferite. Un corp atrage Pământul, dar datorită diferenței colosal de mare dintre masa corpului și masa Pământului, accelerația imprimată Pământului este atât de mică, încât Pământul se poate considera în repaus.

Legea atracției universale se aplică și corpurilor obișnuite. De exemplu, când calculăm forța de atracție dintre doi oameni cu masa de 70 kg fiecare, aflați la 1 m distanță unul de celălalt, obținem valoarea $F_a = 3,26 \cdot 10^{-9}$ N, care este atât de mică, încât nu se produce nici un efect măsurabil.

Singura forță de atracție apreciabilă pe care o simte un corp de pe Pământ este forța de greutate exercitată de către Pământ.

Explică de ce cosmonauții pot păși pe Lună. 4

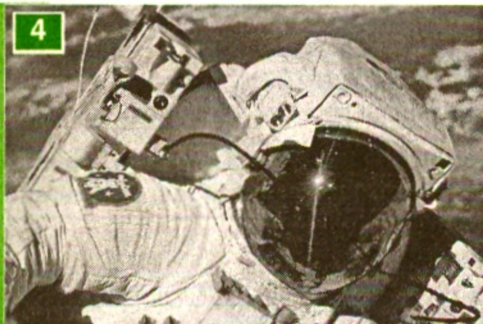
Greutatea – forță de atracție universală manifestată în vecinătatea Pământului

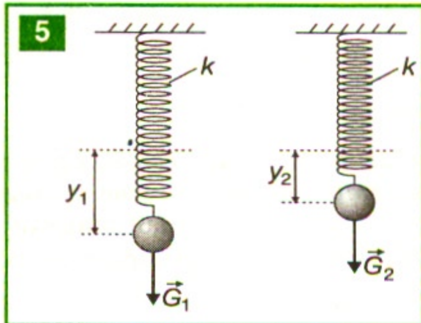
Căderea unui obiect este efectul atracției universale. Forța de greutate este forța gravitațională care produce căderea accelerată a corpurilor libere spre Pământ.

În absența atmosferei, două obiecte diferite lăsate liber din același loc de un cosmonaut ajuns pe Lună cad și ajung simultan pe solul selenar.

Prin cântărirea a două corpuri determinăm masele lor, m_1 și, respectiv, m_2. Cu un dinamometru măsurăm greutățile, lor G_1 și, respectiv, G_2 în același loc pe Pământ 5

Rapoartele $\frac{\vec{G}_1}{m_1}$ și $\frac{\vec{G}_2}{m_2}$ sunt egale și nu depind de masa corpurilor, ci de locul unde se fac determinările. Vectorii forțe de greutate au aceeași direcție și același sens în același loc de pe Pământ, deci putem scrie:





$$\frac{\vec{G}_1}{m_1} = \frac{\vec{G}_2}{m_2} = \vec{g}.$$

Putem generaliza: pentru toate corpurile plasate în același loc, pe Pământ sau în apropierea lui, mărimea vectorială $\frac{\vec{G}}{m} = \vec{g}$ este caracteristică locului. Forțele gravitaționale acționează pe direcția de mișcare a corpului lăsat să cadă liber sau pe direcția firului cu plumb, numită și verticala locului. Pentru un corp de masă *m* din apropierea Pământului (altitudinea *h* este neglijabilă), greutatea lui reprezintă forța cu care este atras de către Pământ:

$$mg_0 = k\frac{mM_p}{R_p^2},$$

unde g_0 reprezintă valoarea accelerației gravitaționale la nivelul solului și M_P este masa pământului, iar R_P este raza Pământului. Rezultă expresia accelerației gravitaționale la suprafața Pământului:

$$g_0 = k\frac{M_p}{R_p^2}.$$

La altitudinea h, obținem expresia accelerației gravitaționale.

$$g_h = k\frac{M_p}{(R_p + h)^2}.$$

Din raportul lor rezultă:

$$g_h = g_0\frac{R_p^2}{(R_p + h)^2} = g_0\frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R_p}\right)^2}.$$

Accelerația gravitațională scade cu altitudinea *h* față de nivelul mării și cu latitudinea (deoarece Pământul nu este sferic, raza la ecuator este mai mare decât la poli), dar este aceeași pentru toate masele corpurilor plasate în același loc pe Pământ.
Pentru altitudini mici comparativ cu raza Pământului, $h \ll R$, se poate face următoarea aproximație:

$$g_h = g_0\left(1 - 2\frac{h}{Rp}\right).$$

Până la altitudini $h = 30$ km, scăderea lui g_p față de g_0 este sub 1% și din această cauză putem considera că în vecinătatea Pământului accelerația gravitațională $g_p \approx g_0$.

Forța de greutate $\vec{G}$ a unui corp depinde de mărimea *m* a masei corpului și de mărimea vectorială $\vec{g}$, care depinde de locul în care este plasat corpul. Deoarece valoarea accelerației gravitaționale depinde de punctul de pe sol, s-a definit prin convenție accelerația gravitațională la nivelul mării și pe paralela de 45°, $g_0 = 9{,}81$ m/s². În România se poate considera $g_0 = 9{,}81$ m/s², iar în calculele obișnuite se poate lua valoarea



$g \approx 10$ m/s². Accelerația gravitațională la nivelul solului este o caracteristică a locului, deoarece Pământul nu este rotund. În afara acestor variații ale accelerației gravitaționale, merită să amintim că valoarea ei se modifică și datorită densităților diferite ale straturilor geologice care conțin diferite zăcăminte.

În tabelul de mai jos sunt prezentate accelerațiile gravitaționale medii de la suprafața diferitelor corpuri cerești.

Consecințe:

Mareele apar datorită forțelor de atracție gravitațională, exercitate de Soare și Lună, asupra maselor de apă din mări și oceane. Forțele gravitaționale influențează creșterea plantelor, conformația și scheletul animalelor mari. Organele interne ale omului s-au adaptat acestor forțe. Trecerea cosmonauților în stare de imponderabilitate se face după lungi antrenamente de adaptare. **6** Greutatea unui corp nu este o proprietate caracteristică a corpului, în timp ce masa corpului este o mărime caracteristică acestuia.

Corpul ceresc	g_m (m/s²)
Lună	1,62
Soare	273
Venus	8,5
Marte	3,8
Pământ	9,8
Jupiter	26

Aplicații

1. Putem estima masa Pământului, cunoscând valoarea razei Pământului $R_p = 6370$ km și constanta atracției universale $K = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \dfrac{N \cdot m^2}{\text{kg}}$.

$$Mp = \frac{g_0 Rp^2}{k} = 5{,}97 \cdot 10^{24} kg\ .$$

2. Greutatea unui corp se măsoară cu dinamometrul. La pol, forța elastică F_{el} indică corect greutatea corpului, în timp ce la ecuator, datorită rotației proprii a Pământului, corpul pare mai ușor, în sensul că indicația forței elastice va fi mai mică.

Problemă rezolvată

Cu cât la sută greutatea unui om aflat într-un avion care zboară la 10 km altitudine este mai mică decât greutatea acestuia la sol ($R_p = 6400$ km) ?

Rezolvare

$G = mg_0$ este greutatea omului la sol.

Ținând cont de modul în care se modifică accelerația gravitațională cu creșterea înălțimii, la înălțimea h, omul va avea greutatea:

$$G' = mg_0\left(1 - \frac{2h}{Rp}\right).$$

Variația relativă a greutății $\frac{G-G'}{G}=\frac{2h}{Rp}=3{,}125\cdot10^{-3}=0{,}3125\%$.

Scăderea greutății omului este practic nesesizabilă.

ACCELERAȚIA GRAVITAȚIONALĂ CA INTENSITATE A CÂMPULUI GRAVITAȚIONAL *

Pământul are masa $M_P \approx 6\cdot10^{24}$ kg și exercită forțe de atracție asupra fiecărui corp aflat în apropierea lui la diferite altitudini h sau la suprafața lui. Spațiul din jurul unui corp de masă M în care se manifestă interacțiuni gravitaționale asupra oricărui alt corp plasat în acest spațiu reprezintă câmp gravitațional. Câmpul fizic se investighează cu ajutorul unui corp de probă. Corpul de probă este un corp de masă foarte mică folosit pentru determinarea proprietăților câmpului gravitațional produs de o configurație de corpuri cu diferite mase.
Mărimea fizică definită de raportul dintre forța gravitațională care acționează asupra unui corp de probă aflat într-un punct și masa corpului de probă se numește **intensitate a câmpului gravitațional** în punctul respectiv.

Intensitatea câmpului gravitațional $\vec{\Gamma}$, generat de un corp de masă M, într-un punct situat la distanța r de centrul de masă M al corpului, este mărimea fizică vectorială egală cu raportul dintre forța gravitațională $\vec{F}_{grav}$ și masa m a corpului supus acțiunii ei: $\vec{\Gamma}=\frac{\vec{F}_{grav}}{m}$.

Pentru un corp omogen sferic de masa M la distanța r de acesta, $\vec{\Gamma}=\frac{-kM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$,

în modul $\Gamma=K\frac{M}{r^2}$

Intensitatea câmpului gravitațional scade invers proporțional cu pătratul distanței față de centrul corpului care generează câmpul și depinde numai de masa M care creează câmpul, fiind independentă de masa corpului de probă. Intensitatea câmpului gravitațional într-un punct are aceeași direcție și sens cu forța gravitațională: $\vec{F}_g=m\cdot\vec{\Gamma}$. Unitatea de măsură:

$$[\Gamma]_{SI}=\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}.$$

Observăm că mărimea intensității câmpului gravitațional este aceeași cu cea a accelerației gravitaționale $\vec{g}=\frac{\vec{F}_{gravitatie}}{m}$, dar semnificațiile fizice și unitățile de măsură sunt diferite.

Problemă rezolvată

Pășind pe Lună, Neil Armstrong a spus „Un pas mic pentru mine, un pas mare pentru omenire". Să se calculeze de câte ori este mai înaltă săritura pe verticală pe Lună decât pe Pământ, știind că $g_L = \frac{g_p}{6}$.

Rezolvare

Săritura pe Pământ se obține din ecuația lui Galilei $v^2 = v_0^2 - 2gh$. Pentru $v = 0$ obținem $h_{max_p} = \frac{v_0^2}{2g_p}$.

Presupunând că viteza inițială v_0 se păstrează și pe Lună $h_{max_L} = \frac{v_0^2}{2g_L}$

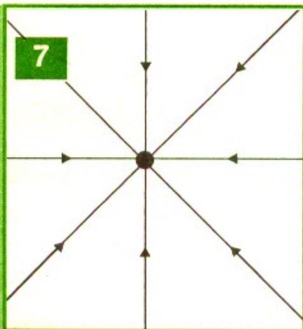
$$\text{deci } \frac{h_{max_L}}{h_{max_p}} = \frac{g_p}{g_L} = 6.$$

Săritura pe Lună va fi mai mare de șase ori decât pe Pământ.

Interacțiunea gravitațională se transmite prin câmp*

Câmpul gravitațional este generat de un corp cu masa M în spațiul din jurul lui. În jurul oricărui corp de masă M apare proprietatea de atracție asupra altor corpuri de diverse mase m, adică masa M este generatoare de câmp gravitațional prin intermediul căruia se transmit interacțiuni asupra altor corpuri situate la distanță.

Câmpul gravitațional generat de o masă M se pune în evidență prin forțe de atracție exercitate asupra oricărui corp cu masa m, adus în vecinătatea corpului M.
Sursa câmpul gravitațional este masa corpului.
Masa are și o proprietate gravifică pe lângă cea inerțială, dar masa gravifică este egală cu cea inerțială. Corpurile cerești (planete, stele, sateliți) și cele terestre sunt supuse acelorași legi. Interacțiunile gravitaționale sunt neglijabile la nivelul corpurilor terestre și la nivelul particulelor constituente ale corpurilor. În fiecare punct al câmpului gravitațional se exercită forțe de interacțiune asupra corpurilor plasate în acel punct. Fiecărui punct al spațiului în care se manifestă un câmp gravitațional i se poate asocia o mărime ce caracterizează câmpul. Această mărime este intensitatea câmpului gravitațional în acel punct.



Intensitatea câmpului gravitațional scade cu altitudinea, ca și forța de atracție gravitațională.

Câmpul nu poate fi perceput direct de către oameni. Liniile de câmp dau o reprezentare intuitivă a câmpului. **7**

Linia de câmp care trece printr-un punct al câmpului gravitațional este o curbă tangentă la vectorul intensitate $\vec{\Gamma}$ al câmpului gravitațional. Prin convenție, aceste linii sunt orientate în sensul vectorului intensitate a câmpului.

Linia de câmp determină, în fiecare punct prin care trece, orientarea vectorului forță care acționează asupra unui mic corp de probă, plasat în acel punct. Acest corp se deplasează doar sub acțiunea forțelor din câmpul considerat, în lungul unei linii de câmp. Sensul deplasării corpului de probă determină sensul liniei de câmp. Pentru ca reprezentarea să fie fidelă și intuitivă se face convenția: în zonele în care liniile de câmp sunt mai rare, câmpul este mai slab, iar în zonele în care liniile de câmp sunt mai dese, câmpul este mai intens.
Considerând Pământul o sferă omogenă, liniile de câmp vor fi radiale, având sensul spre centrul acestuia. Spunem că un astfel de câmp gravitațional este radial.
În orice punct al câmpului gravitațional putem reprezenta un vector intensitate al câmpului gravitațional. Mulțimii de puncte dintr-un câmp gravitațional îi corespunde o mulțime de vectori de intensitate $\vec{\Gamma}_i$ în fiecare punct P_i (unde $i = 1, 2, 3...$), care depind de poziția punctului considerat. Câmpul gravitațional este un câmp de vectori. Aceste proprietăți pot fi extinse și asupra celorlalte corpuri cerești.
În apropierea Pământului se observă că liniile de câmp pot fi considerate perpendiculare pe o suprafață plană. Pentru două puncte, situate până la distanțe de sute de metri pe suprafața Pământului, verticalele corespunzătoare se pot considera practic paralele. **8** Spunem că în acea zonă câmpul este uniform $\vec{\Gamma} = \text{ct}$. Se poate accepta convenția că numărul liniilor de câmp care intersectează aria unitate a unei suprafețe, perpendiculară pe liniile de câmp, este numeric egală cu intensitatea câmpului.
Experimentele simulate pe calculator permit descrierea interacțiunilor gravitaționale dintre un corp și Pământ, a dependenței forței gravitaționale de altitudine sau latitudine, producerea mareelor, mișcarea sateliților, modificarea traiectoriei unui corp în câmp gravitațional prin schimbarea condițiilor inițiale.
Dacă într-o regiune se află mai multe corpuri, fiecare corp va crea propriul său câmp gravitațional, independent de existența celorlalte corpuri.
La suprapunerea mai multor câmpuri gravitaționale, vectorul intensitate al câmpului gravitațional rezultant este suma vectorială a vectorilor intensitate ai câmpurilor componente:

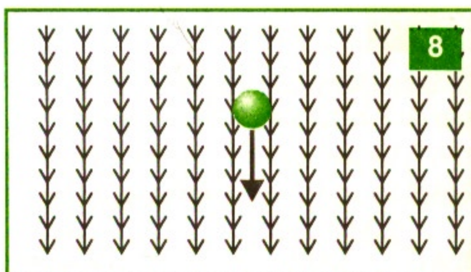
$$\vec{\Gamma}_{rez} = \vec{\Gamma}_1 + \vec{\Gamma}_2 + ... + \vec{\Gamma}_n \ .$$

Această mărime fizică vectorială $\vec{\Gamma}_{rez}$ caracterizează câmpul gravitațional produs de un sistem de corpuri și depinde doar de masele și pozițiile corpurilor ce formează sistemul. Câmpul rezultant va fi caracterizat de o singură linie de câmp gravitațional, tangentă la vectorul intensitate al câmpului rezultant $\vec{\Gamma}_{rez}$.

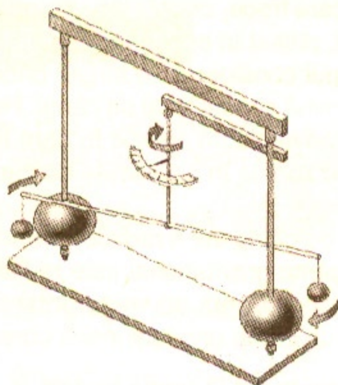
De exemplu, între Pământ și Lună există un punct în care $\vec{\Gamma}_P + \vec{\Gamma}_L = 0$, ,

deci $\vec{\Gamma}_{rez} = 0$.

Un corp plasat în acel punct nu va fi atras nici de Pământ și nici de Lună, fiind astfel în imponderabilitate.



9



Extindere pentru curioși

Cavendish a determinat valoarea constantei gravitaționale cu ajutorul unei balanțe de torsiune. 9 Balanța de torsiune este alcătuită din două sfere ușoare (0,73 kg), aflate la capetele unei tije suspendate de un fir de torsiune. Alte două bile masive sunt fixate pe suportul balanței. Între bilele masive și bilele ușoare fixate pe tija balanței acționează forțe de atracție gravitațională. Aceste forțe de atracție rotesc tija și oglinda plană fixată pe tija balanței în jurul axei verticale cu un unghi, iar o rază de lumină reflectată de oglindă se rotește cu un unghi dublu. În firul elastic se generează o forță de deformație proporțională cu acest unghi. Forța de interacțiune gravitațională dintre corpul de probă și corpul fixat este echilibrată de o forță de revenire de tip elastic care depinde de deviația unghiulară măsurată și de constanta de elasticitate *C* a firului de torsiune. Se efectuează mai multe determinări cu diferite mase de probă, mediind apoi valorile. Pentru măsurarea constantei de elasticitate *C* a firului de torsiune se acționează cu forțe mici, cunoscute, asupra brațelor balanței. Deviația unghiulară a brațelor va fi extrem de mică. Pentru diverse forțe vom obține diverse deviații. Acest experiment este realizabil numai în laboratoarele dotate cu dispozitive de mare precizie.

Forța de atracție gravitațională joacă rol de forță centripetă în mișcarea planetelor în jurul Soarelui,în mișcarea sateliților pe traiectoriile lor. Se poate spune că forța gravitațională curbează traiectoria Lunii în jurul Pământului și Luna cade spre Pământ, dar nu atinge Pământul. Dacă se aruncă orizontal un corp cu viteze din ce în ce mai mari, corpul descrie traiectorii care intersectează suprafața Pământului la distanțe din ce în ce mai mari. La o anumită viteză v_0, numită prima viteză cosmică, corpul nu mai cade pe Pământ și-l înconjoară pe o orbită închisă pentru care forța gravitațională joacă rol de forță centripetă:

$$F_{grav} = F_{centripet} \Rightarrow mg_0 = \frac{mv_0^2}{R_p} \Rightarrow v_0 = 7{,}9\,\text{km/s}$$

dacă se consideră $R_P = 6400$ km (raza medie a Pământului). Dacă viteza inițială v_0 are o valoare mai mare decât prima viteză cosmică, atunci corpul descrie o traiectorie eliptică.

TESTE

La următoarele afirmații răspundeți cu A dacă afirmația respectivă este adevărată sau cu F dacă este falsă:

1. A F. La pol, greutatea corpurilor este maximă.
2. A F. La ecuator, greutatea corpurilor are valoarea cea mai mică de pe suprafața planetei.
3. A F. Corpul de probă este considerat punct material.

4. A F. Dacă un corp de probă de masă m se află la o distanță față de centrul planetei, mai mare decât raza acesteia, atunci forța gravitațională are valoarea mai mică față de valoarea de la suprafața planetei.
5. A F. Dacă acest corp de probă de masă m se află în interiorul planetei la o adâncime h, atunci forța gravitațională este dată doar de sfera cu rază $R - h$, unde R este raza planetei.
6. A F. Direcția verticalei locului într-un punct de pe Pământ situat la latitudinea $\alpha = 45°$ trece exact prin centrul Pământului.
7. A F. Forțele de atracție dintre corpurile de pe Pământ sunt mai mari decât greutățile corpurilor.
8. A F. Câmpul gravitațional al Pământului este un câmp de forțe radial.
9. A F. Cu creșterea distanței de la centrul Pământului, intensitatea câmpului gravitațional scade.
10. A F. Linia de câmp gravitațional coincide cu traiectoria corpului de probă lăsat liber în câmp.
11. A F. Când mai multe corpuri crează câte un câmp gravitațional, printr-un punct trece o singură linie de câmp.

Probleme

1. Valoarea forței de atracție dintre două corpuri cu masele $m_1 = m_2 = 50$ kg, cu distanța dintre centrele lor de $r = 1$ m este:
a) $6,67 \cdot 10^{-11}$ N; b) $6,67 \cdot 10^{-9}$ N; c) $1,66 \cdot 10^{-9}$ N; d) $1,66 \cdot 10^{-7}$ N.

2. Altitudinea față de Pământ la care accelerația gravitațională se reduce la jumătate este:
a) 6400 km; b) 2624 km; c) 3200 km; d) 4685 km.

3. Distanța dintre Pământ și Lună este $D = 3,8 \cdot 10^5$ km. Masa Pământului este de 81 de ori mai mare decât a Lunii. Distanța față de Pământ în care intensitatea câmpului gravitațional este nulă este:
a) $38 \cdot 10^3$ km; b) $34,2 \cdot 10^5$ km; c) $1,9 \cdot 10^5$ km; d) $9,5 \cdot 10^4$ km.

4. Se știe că electronul se rotește în jurul protonului pe o orbită cu raza $r = 5,3\ 10^{-10}$ m. Se cunosc masa electronului $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg și masa protonului $m_p = 1840\ m_e$. Forța de atracție gravitațională dintre un electron și un proton (în atomul de hidrogen) este:
a) $3,62 \cdot 10^{-38}$ N; b) $3,62 \cdot 10^{-29}$ N; c) $3,62 \cdot 10^{-49}$ N; d) $3,62 \cdot 10^{-18}$ N.

5. Forța de atracție gravitațională asupra Pământului, dacă masa Soarelui este $M = 2 \cdot 10^{30}$ Kg, masa Pământului este $m = 6 \cdot 10^{24}$ kg și raza medie a orbitei Pământului față de Soare este $R_{P\text{-}S} = 1,5 \cdot 10^{11}$ m este:
a) $3,56 \cdot 10^{18}$ N; b) $3,56 \cdot 10^{20}$ N; c) $35,6 \cdot 10^{24}$ N; d) $3,56 \cdot 10^{22}$ N.

6. O navă cosmică ce se rotește în jurul Pământului pe o orbită cu raza $r = 4\ R_P$, unde raza Pământului este $R_P = 6\ 400$ km. Valoarea vitezei pe orbită este:
a) 4 km/s; b) 126,5 m/s; c) 7,9 km/s; d) 5,66 km/s.

7. Știind că pe o planetă accelerația gravitațională este de 15 ori mai mică decât pe Pământ, de câte ori este mai înaltă o detentă a aceluiași om pe planetă decât pe Pamânt ?
a) de 5 ori; b) de 6 ori; c) de 12 ori; d) de 15 ori.

8. Dacă raportul maselor a două planete $\frac{M_1}{M_2}=\frac{1}{8}$ iar raportul razelor $\frac{R_1}{R_2}=\frac{1}{4}$, atunci raportul accelerațiilor gravitaționale $\frac{g_1}{g_2}$ este:
a) 1/2; b) 2; c) 1/4; d) 4.

9. Completează un tabel de valori și reprezintă grafic accelerația gravitațională în funcție de altitudinea *h* (multiplu întreg al razei Pământului).

h	R_E	$2R_E$	$3R_E$	$4R_E$	$5R_E$
g	9,8				

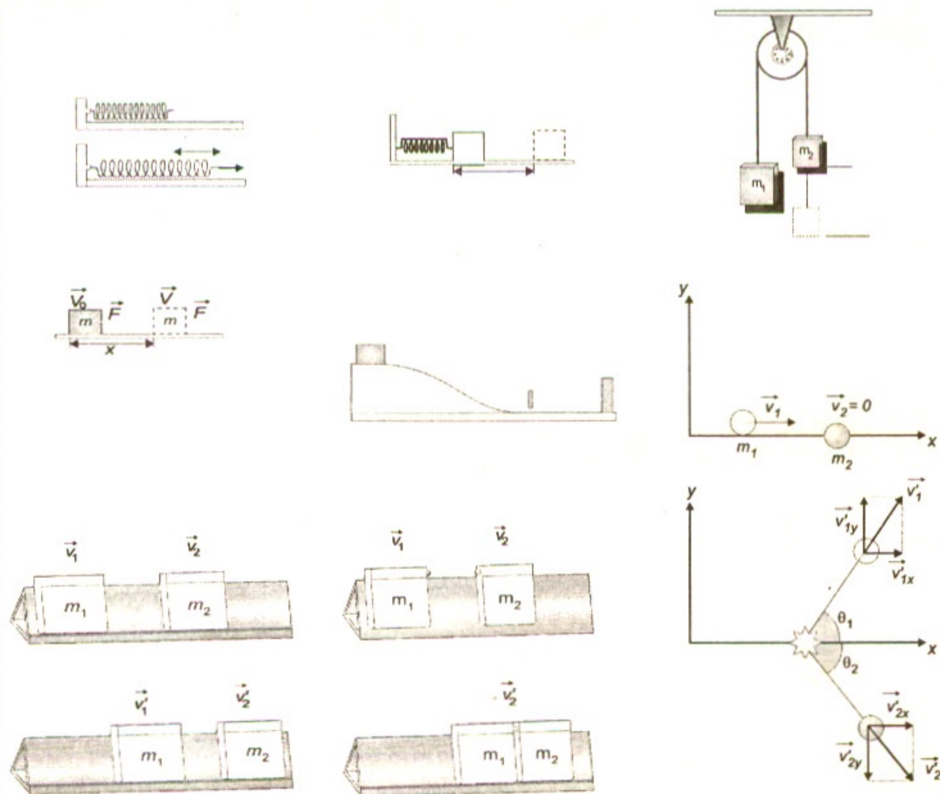
Proiect de recapitulare - dinamică

1. Ce dispozitive recunoașteți în figurile de mai jos, unde le putem întâlni și la ce sunt utile ? **1**

2. Care este principiul lor de funcționare ? Ce legi, principii sau teoreme pot fi puse în evidență cu dispozitivele din figurile de mai jos și în ce condiții ? **1**

3. Formulați câte o problemă simplă, în care să folosiți mărimile fizice din figurile de mai jos **1**. Ce parametri mai intervin în rezolvarea problemei propuse (pentru cercul de fizică sau, de ce nu, pentru revista „Evrika") și ce constante fizice sunt considerate cunoscute ?





CAPITOLUL 3

TEOREME DE VARIAȚIE ȘI LEGI DE CONSERVARE ÎN MECANICĂ

„În fizică avem cunoștință despre o lege a naturii: conservarea energiei. Această lege afirmă că există o cantitate numită energie ce nu se schimbă în multiplele modificări pe care le suferă natura. Aceasta este o idee abstractă, deoarece afirmă că există o cantitate numerică, ce nu se schimbă când se întâmplă ceva. La verificarea conservării energiei trebuie să fim atenți să nu adăugăm sau să nu omitem ceva." (Richard Feynman – *Fizica modernă*)

LUCRUL MECANIC. PUTEREA MECANICĂ

Condițiile în care o forță efectuează lucru mecanic

Evoluția dintr-o stare considerată „inițială“ către o stare ulterioară (considerată „finală“) o vom numi *proces*. Starea de mișcare este caracterizată de mărimea vitezei. Considerăm un corp rigid aflat în repaus pe un plan orizontal. Dacă asupra corpului acționează o forță rezultantă diferită de zero, atunci deplasarea lui pe suprafața planului se face accelerat. În cursul acestui proces de deplasare, în care se schimbă doar starea de mișcare, forța rezultantă efectuează un lucru mecanic care măsoară transferul de energie către corpul considerat. Greutatea corpului și reacțiunea normală a planului sunt perpendiculare pe direcția deplasării și nu contribuie la schimbarea stării de mișcare a corpului **1**.

Spunem că o forță efectuează lucru mecanic dacă punctul ei de aplicație se deplasează într-o direcție care nu este perpendiculară pe această forță. În general, o forță oblică (înclinată) față de direcția de deplasare a unui corp se poate descompune în două componente perpendiculare între ele:

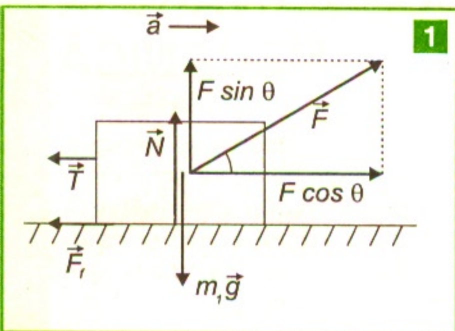
- $\vec{F}_t$ (se notează și cu $\vec{F}_p$ sau $\vec{F}_{tg}$, deoarece este paralelă cu direcția de deplasare tangentă la suprafața pe care se mișcă);
- $\vec{F}_n$ (se notează și cu $\vec{F}_\perp$, deoarece este perpendiculară pe direcția de deplasare).

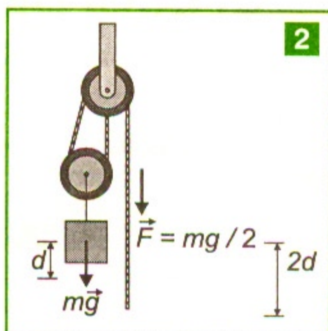
Componenta forței paralelă cu deplasarea, definită prin proiecția forței pe direcția deplasării, este implicată în transfer energetic sub formă de lucru mecanic.

Componenta normală F_n a forței nu este implicată în transfer energetic sub formă de lucru mecanic, deoarece această forță, dacă acționează singură, poate produce o schimbare de direcție, dar nu schimbă mărimea vitezei corpului (vezi acțiunea unei forțe centripete în mișcarea circulară uniformă).

Poți spune că un sistem mecanic conține lucru mecanic într-o anumită stare? Forța mușchilor tăi poate efectua un lucru mecanic care schimbă stările de mișcare sau pozițiile relative, față de un referențial, ale părților din interiorul unui sistem. **2**

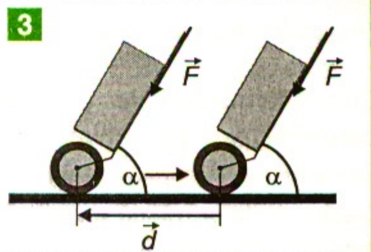
Dacă însă folosești forța mușchilor pentru a ține în brațe un obiect greu, obosești și te dor brațele de efort, dar nu efectuezi lucru mecanic, deoarece forța nu-și deplasează punctul de aplicație.





Dacă punctul de aplicație al componentei tangențiale a forței se translatează de la un punct până la alt punct situat la distanța *d*, spunem că forța efectuează un lucru mecanic. Considerăm o forță *F*, constantă în mărime, care acționează asupra unui corp sub unghi α față de direcția de deplasare a corpului considerat. **3**

Proiectăm forța pe direcția de deplasare și obținem: $F_{tg} = F \cdot \cos\alpha$.



Lucrul mecanic efectuat de această forță *F* este o mărime scalară care se definește prin produsul dintre componenta forței paralelă cu deplasarea și deplasarea *d* a corpului:

$$L_F = F_{tg} \cdot d \quad \text{sau} \quad L_F = (F\cos\alpha)d.$$

Deplasarea *d* se notează și cu Δr. Reținem că o forță care se translatează într-o direcție perpendiculară pe direcția ei de acțiune nu efectuează lucru mecanic.

În general, din produsul scalar a doi vectori rezultă un scalar.

Lucrul mecanic reprezintă produsul scalar dintre vectorul forță $\vec{F}$ și vectorul deplasare $\Delta\vec{r}$:

$$L_F = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F(\Delta r)\cos\left(\vec{F},\ \Delta\vec{r}\right) = Fd\cos\alpha,$$

unde α este unghiul dintre cei doi vectori, iar $\Delta\vec{r} = \vec{d}$ este vectorul deplasare.

Lucrul mecanic este o mărime de proces, deoarece are semnificație numai la trecerea corpului dintr-o stare în altă stare.

Lucrul mecanic este o mărime aditivă. Lucrul mecanic total, efectuat în timpul unei deplasări, se obține din însumarea lucrurilor mecanice parțiale elementare care corespund intervalelor de timp în care forța rămâne practic constantă sau în care putem calcula forța medie. Lucrul mecanic este numeric egal cu aria dintre graficul forței, axa absciselor și ordonatele duse prin extremitățile graficului (forța fiind reprezentată în funcție de abscisă, $F = f(x)$). **4** Aceasta reprezintă interpretarea geometrică a lucrului mecanic.

În sistemul internațional de unități (SI) lucrul mecanic se exprimă, ca și alte mărimi energetice, în joule (simbol J):

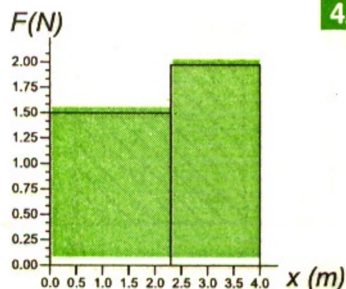
$$[L]_{SI} = 1\ \text{N} \cdot 1\text{m} = 1\ \text{J}.$$

Un joule reprezintă lucrul mecanic efectuat de o forță constantă de 1 N care își deplasează punctul de aplicație pe distanța de 1 m, în direcția și sensul ei.

Lucrul mecanic al unei forțe poate fi activ sau rezistiv. Lucrul mecanic este activ (motor) dacă deplasarea are loc în sensul acțiunii forței.

Notăm unghiul dintre direcțiile forței și deplasării cu α. Lucrul mecanic activ corespunde unui unghi $0 \le \alpha < \pi/2$ (unghiul α este ascuțit).

Lucrul mecanic se consideră rezistiv dacă deplasarea are loc în sens invers acțiunii forței.



Un lucru mecanic rezistiv este negativ ($L < 0$). În acest caz unghiul α este obtuz: $\pi/2 < \alpha \leq \pi$.

Cazul intermediar este cel în care $\alpha = 90^0$ și $L_F = 0$, adică lucrul mecanic al unei forțe perpendiculare pe deplasarea punctului său de aplicație este nul. În acest caz proiecția forței $\vec{F}$ pe direcția de deplasare este nulă.

Dacă o forță $\vec{F}$ ridică un corp pe verticală, spunem că forța efectuează un lucru mecanic activ, deoarece $L_F > 0$.

Lucrul mecanic al greutății unui corp care urcă pe verticală și lucrul mecanic al forțelor de frecare este negativ, deoarece forțele acționează în sens opus mișcării și unghiul dintre cei doi vectori este $\alpha = 180°$.

Spunem că un sistem „posedă" energie dacă sistemul este capabil să efectueze lucru mecanic (un gaz comprimat, un resort întins, apa care cade de la o anumită înălțime).

Lucrul mecanic efectuat de diferite forțe

Dacă într-un interval de timp acționează mai multe forțe asupra unui sistem, atunci lucrul mecanic total efectuat asupra acestui sistem se obține prin însumarea algebrică (cu semnul pozitiv sau negativ) a lucrurilor mecanice ale forțelor respective:

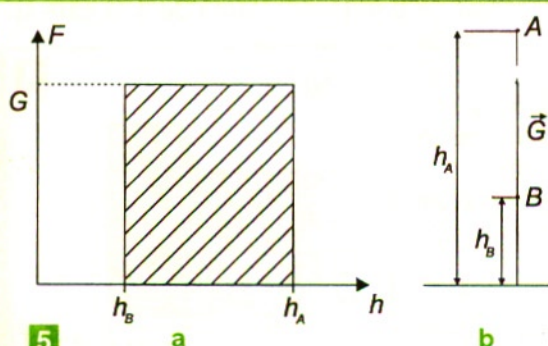
$$L_{total} = L_{F1} + L_{F2} + L_{F3}...+ L_{Fn}.$$

Lucrul mecanic măsoară transferuri energetice între sisteme (un sistem mecanic și mediul exterior lui) care se fac prin mișcări macrofizice ordonate, vizibile cu ochiul liber (deplasări și deformări în câmpuri de forțe de interacțiune).

Lucrul mecanic al forțelor conservative și neconservative

1. Lucrul mecanic al forței de greutate

Dacă trasăm graficul dependenței forței de greutate $G = m\vec{g}$ de înălțimea față de suprafața Pământului, h, pentru un corp de masă m care se deplasează între două nivele, dintr-un punct A într-un punct B, în câmpul gravitațional terestru, atunci lucrul mecanic al forței de greutate între două puncte, A și B, este egal cu aria limitată de graficul forței și de axa coordonatelor conform interpretării geometrice a lucrului mecanic. Același lucru se obține aplicând relația de definiție a lucrului mecanic $L_{A \to B} = mg\ (h_A - h_B)$, deoarece pentru un corp lăsat liber pe verticală, greutatea își deplasează punctul de aplicație în direcția și sensul ei între cele două puncte. 5ab



Deci lucrul mecanic efectuat de forța de greutate a unui corp de masă m, între punctele de coordonate h_A și h_B, aflate în apropierea Pământului, este:

$$L_{A \to B} = mg(h_A - h_B) = mg\Delta h,$$

unde h este înălțimea corpului față de un nivel de referință.
Dacă un corp se deplasează între punctele A și B pe un plan înclinat, greutatea corpului efectuează lucru mecanic, **6**:

$$L_{A \to B} = G \cdot AB \sin\alpha; \quad AB \sin\alpha = h_A - h_B; \quad L_{A \to B} = mg\,(h_A - h_B).$$

Observăm că numai componenta tangențială $G_t = mg \sin\alpha$ a greutății efectuează lucru mecanic, deoarece își deplasează punctul de aplicație în direcția și sensul ei. Alegând între punctele A și B o traiectorie compusă dintr-o succesiune de segmente orizontale și verticale, greutatea efectuează lucru mecanic numai pe porțiunile verticale. **7** Cum lucrul mecanic este aditiv, însumând aceste lucruri mecanice obținem:

$$L_{A \to B} = mgh_1 + mgh_2 + mgh_3 = mg\,(h_1 + h_2 + h_3) = mg\,(h_A - h_B).$$

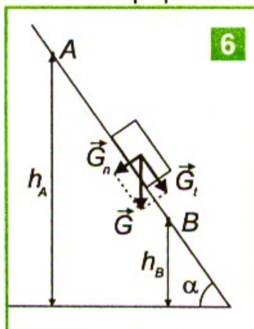
Observăm că lucrul mecanic efectuat de forța de greutate nu depinde de stările intermediare prin care se deplasează corpul (drumul urmat) între punctele A și B. Lucrul mecanic al forței de greutate depinde numai de starea inițială A și de starea finală B. El nu depinde nici de modul în care se deplasează corpul: uniform, accelerat, încetinit etc. Această proprietate este caracteristică forțelor numite ***conservative***. O forță este de tip conservativ dacă lucrul ei mecanic depinde numai de stările inițială și finală și nu depinde de forma drumului și de modul cum se mișcă corpul.
Dacă acest corp este deplasat de-a lungul unui contur închis, atunci lucrul mecanic al forței de greutate este nul, deoarece corpul revine în punctul de unde a pornit:

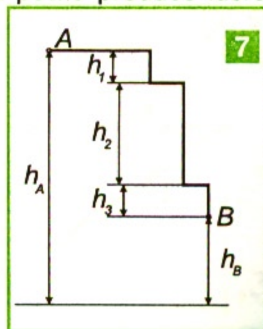
$$L_{ABA} = 0$$

și, cum lucrul mecanic este aditiv, $L_{A \to B} + L_{B \to A} = 0$, înseamnă că

$$L_{A \to B} = -L_{B \to A}.$$

Dacă ridicăm un corp cu greutatea $G = m \cdot g$ la o înălțime h, atunci noi efectuăm prin forțele musculare F, egale cu greutatea G un lucru mecanic $L_F = mgh$. Dacă lăsăm corpul să cadă liber de la această înălțime până în poziția sa inițială, forța de greutate efectuează același lucru mecanic $L_G = mgh$. Acest lucru mecanic poate fi folosit la acționarea unui mecanism de împingere a pilonilor în pământ („berbecul"). Înseamnă că putem recupera lucrul mecanic pe care l-am cheltuit pentru ridicarea corpului în câmp gravitațional. Sistemul format de corp și Pământ poate produce lucru mecanic, sistemul are energie.





2. Lucrul mecanic al forțelor de frecare

Pe un plan orizontal se deplasează cu frecare un corp între două puncte A și B aflate la distanța d unul de celălalt.

În cazul acestei mișcări forța de frecare își deplasează punctul de aplicație, dar în sens contrar sensului de mișcare al corpului și prin urmare lucrul ei mecanic este negativ:

$$L_{A\to B} = \vec{F}_f \cdot \overrightarrow{AB} = F_f \cdot d\cos 180° = -F_f \cdot d = -\mu N \cdot d = -\mu mgd$$

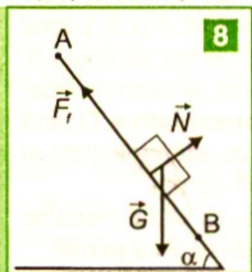
deoarece $d = AB$.

Dacă același corp coboară pe un plan înclinat cu unghiul α pe aceeași distanță d, **8** lucrul mecanic al forței de frecare se calculează astfel:

$$L_{A\to B} = F_f\, d\cos 180° = -F_f \cdot d = -\mu Nd = -\mu mgd\cos\alpha,$$

deoarece $N = mg\cos\alpha$.

Observăm că, deși în cele două cazuri forța de frecare și-a deplasat punctul de aplicație pe distanța d, lucrul ei mecanic are valori diferite.



Dacă unghiul planului se modifică, se schimbă și valoarea lucrului mecanic al forței de frecare, chiar și în situația în care punctul ei de aplicație se deplasează pe aceeași distanță.

Lucrul mecanic al forței de frecare nu depinde numai de starea inițială și finală, ci depinde și de stările intermediare, deci forța de frecare este o forță neconservativă.

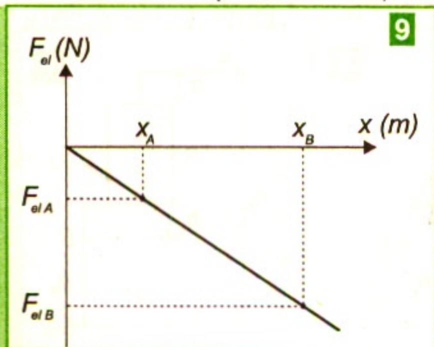
Dacă lucrul mecanic efectuat de o forță între două puncte depinde de stările intermediare prin care se face deplasarea sau lucrul mecanic pe un contur închis este diferit de zero, atunci această forță este ***neconservativă***.

Dacă un corp solid descrie un traseu închis în prezența frecărilor, lucrul mecanic al forțelor de frecare este negativ, iar mărimea acestui lucru mecanic depinde de lungimea deplasării pe „drumul" ales. Forța de frecare este o forță rezistivă.

3. Lucrul mecanic al forței elastice*

Se știe că $\vec{F}_{el} = -k\vec{x}$, adică este o forță care apare într-un corp elastic și se opune deformației. Această forță nu este constantă în modul și din această cauză pentru a calcula lucrul ei mecanic apelăm la interpretarea geometrică a lucrului mecanic. **9**

Pentru aceasta reprezentăm forța elastică în funcție de deformația x:



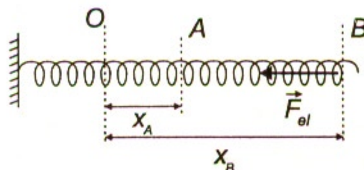
$$L_{A\to B} = A_{trapez} = \frac{(x_B - x_A)(F_{el\,A} + F_{el\,B})}{2}$$

$$L_{A\to B} = \frac{(x_B - x_A)(-kx_A - kx_B)}{2}$$

$$L_{A\to B} = \frac{-k(x_B^2 - x_A^2)}{2} = -\frac{kx_B^2}{2} + \frac{kx_A^2}{2}.$$

Observăm că, și în acest caz, expresia lucrului mecanic al forței elastice depinde numai de poziția inițială prin x_A și de poziția finală prin

x_B, nedepinzând de pozițiile intermediare. Prin urmare și forța elastică este o forță de tip ***conservativ***. Lucrul mecanic al forței elastice poate fi negativ atunci când un resort este întins, și deci forța elastică este rezistivă sau poate fi pozitiv când resortul se decomprimă, caz în care forța elastică este motoare. **10** Punctul *O* reprezintă poziția în care resortul nu este deformat.



Semnificația fizică a puterii și a randamentului

Două sisteme pot efectua același lucru mecanic în intervale de timp diferite. Un criteriu de discriminare este puterea mecanică.

Puterea mecanică medie produsă de un sistem este mărimea fizică scalară care exprimă raportul dintre lucrul mecanic L_F efectuat de o forță în intervalul de timp Δt corespunzător acțiunii forței și mărimea intervalului de timp:

$$P_{med} = \frac{L_F}{\Delta t}$$

În general, lucrul mecanic nu se efectuează uniform în timp.

Unitatea de măsură a puterii în Sistemul Internațional este wattul (simbol W):

$$[P]_{SI} = \frac{[L_F]}{[t]} = \frac{1\text{J}}{1\text{s}} = 1\text{W}.$$

Watul este puterea mecanică ce corespunde forței care efectuează un lucru mecanic de 1 J într-un timp de o secundă.

O unitate tolerată în tehnică a puterii mecanice este calul putere: 1 CP = 746 W.

Puterea momentană se poate exprima dacă punctul de aplicație al forței se deplasează un interval de timp Δt foarte mic:

$$P = \frac{\vec{F} \cdot \Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Puterea este o mărime scalară, ca și lucrul mecanic. Dacă viteza corpului este constantă, înseamnă că lucrul mecanic al forțelor active este egal cu lucrul mecanic al forțelor rezistive (forțele de frecare), deci puterea activă P_a (câștigată) este egală cu cea rezistivă (consumată, P_c). Dacă vectorii $\vec{F}$ și $\vec{v}$ sunt coliniari și în același sens atunci $P_a = Fv$, iar dacă $\vec{F} \perp \vec{v}$, atunci $P = 0$.

Schimbul (transferul) energetic sub formă de lucru mecanic între un corp și mediul exterior presupune modificări (variații) ale energiei. Lucrul mecanic nu este o mărime de stare a corpului, deoarece este determinat de forțe care își deplasează punctele de aplicație și deci nu sunt statice. Transferul energetic de la un sistem către alt sistem (de la „sursă" către sistemul de corpuri considerat „beneficiar") se realizează cu pierderi energetice datorită lucrului mecanic al forțelor rezistive.

Randamentul η reprezintă raportul dintre lucrul mecanic util L_u care se regăsește la „beneficiar" și lucrul mecanic consumat L_c „de sursă" în același interval de timp:

$$\eta = \frac{L_u}{L_c} = \frac{P_u}{P_c} \leq 100\%.$$

Lucrul mecanic consumat pentru a ridica un corp pe plan înclinat. Randamentul planului înclinat

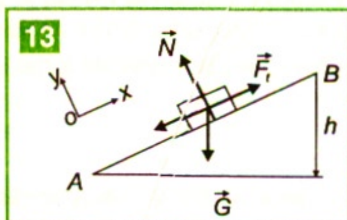
Serpentinele cu pantă mică față de un drum abrupt permit economisirea forței la ridicarea greutăților. 11

Șurubul face parte din familia planului înclinat. 12

Randamentul unui plan înclinat reprezintă raportul dintre lucrul mecanic util, L_u, și lucrul mecanic consumat, L_c:







$$\eta = \frac{L_u}{L_c}.$$

L_u este lucrul mecanic necesar unei forțe de tracțiune să urce corpul uniform, la înălțimea *h*, pe un plan înclinat fără frecare 13:

$$L_u = F_t \cdot AB;$$

$$\text{pe } Ox: F_t = mg\sin\alpha;$$

$$L_u = mgAB\sin\alpha = mgh.$$

L_c este lucrul mecanic consumat, adică lucrul mecanic necesar unei forțe de tracțiune să urce corpul uniform, la aceeași înălțime *h*, pe același plan înclinat, coeficientul de frecare fiind μ, 14:

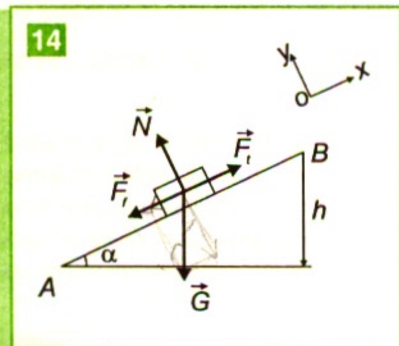
$$L_c = F_t \cdot AB.$$

Pe *Ox*: $F_t - F_f - mg\sin\alpha = 0$.

Pe *Oy*: $N - mg\cos\alpha = 0 \Rightarrow N = mg\cos\alpha$.

Cum $F_f = \mu N = \mu mg\cos\alpha$,

$F_t = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$.



Obținem:

$$L_c = mg \cdot AB \cdot (\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = mg\frac{h}{\sin\alpha}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

$$\eta = \frac{L_u}{L_c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha} = \frac{1}{1+\mu \cdot ctg\alpha}.$$

Randamentul planului înclinat este subunitar și adimensional.
Dacă $\mu = 0$ (cazul ideal, mișcarea este fără frecare), atunci $\eta = 1$, deci se cheltuiește același lucru mecanic când ridicăm corpul la înălțimea h, direct pe verticală sau pe un plan înclinat ideal.
În practică, $\mu \neq 0$ și $\eta < 1$.

Probleme rezolvate

1. În graficul din figura **15** este reprezentată forța de tracțiune a unui automobil în funcție de distanța parcursă. Să se calculeze lucrul mecanic pe fiecare porțiune și pe întreaga distanță parcursă.

Rezolvare

Pe prima porțiune *I*, în care *d* ia valori de la 0 la 10 m, lucrul mecanic se calculează utilizând interpretarea grafică a lucrului mecanic:
$L_{m_1} = A_{triunghi} = 10^6$ J, deci forța este motoare.
Pe porțiunea II, analog $L_{m_2} = -5 \cdot 10^5$ J, deci forța este o forță rezistivă.
Pe porțiunea III, $L_{m_3} = 15 \cdot 10^5$ J, deci forța este motoare.
$L_{m_{total}} = L_{m_1} + L_{m_2} + L_{m_3} = 2 \cdot 10^6$ J.

2. O macara ridică un corp cu masa $m_1 = 1000$ kg la o înălțime $h_1 = 20$ m într-un interval de timp $t_1 = 500$ s. Altă macara ridică un alt corp cu masa $m_2 = 500$ kg la o înălțime $h_2 = 10$ m într-un timp $t_2 = 100$ s. Care dintre cele două macarale este mai eficientă ($g = 10$ m/s^2)?

Rezolvare

Calculăm lucrurile mecanice efectuate de cele două macarale împotriva forțelor de greutate. Aceste lucruri mecanice sunt motoare.

$$L_1 = m_1 g h_1 = 2 \cdot 10^5 \text{ J}$$

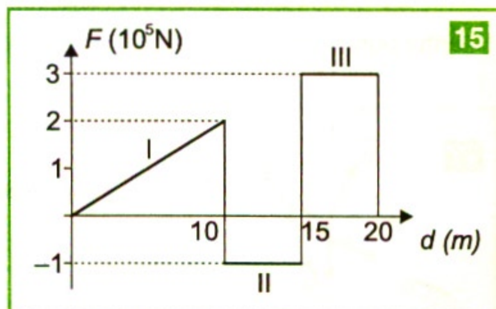
$$L_2 = m_2 g h_2 = 5 \cdot 10^4 \text{ J}.$$

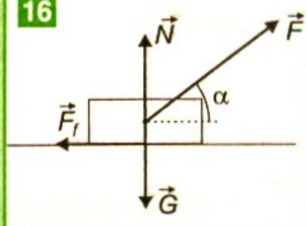
Calculăm puterile medii dezvoltate de cele două macarale

$$P_1 = \frac{L_1}{t_1} = 400 \text{ W};$$

$$P_2 = \frac{L_2}{t_2} = 500 \text{ W}.$$

Deoarece $P_2 > P_1$, este mai eficientă macaraua a doua.





3. Asupra unui corp cu masa $m = 2$ kg, aflat pe o suprafață orizontală, acționează o forță F, care îi imprimă corpului o accelerație $a = 2$ m/s². Cât este lucrul mecanic al acestei forțe pe o distanță $d = 10$ m, dacă forța F face unghiul $\alpha = 30^o$ cu direcția de mișcare, iar mișcarea se face cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu = \frac{1}{2\sqrt{3}}$ și $g = 10$ m/s².

Rezolvare

$L_m = F \cdot d\cos\alpha$.

Calculăm forța F impunând condiția de mișcare a corpului, **16**:

$$\vec{F} + \vec{N} + \vec{F}_f + \vec{G} = m\vec{a}.$$

Pe Ox: $F\cos\alpha - F_f = ma$;

Pe Oy: $F\sin\alpha + N - mg = 0 \Rightarrow N = mg - F\sin\alpha$.

Cum $F_f = \mu N$, obținem $F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha) = ma$.

$$F = \frac{m(a + \mu g)}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} = 9{,}678 \text{ N};$$

$$L_m = 83{,}71 \text{ J}.$$

4. Ce putere activă $P_{activă}$ dezvoltă un cal care deplasează cu viteza v o sanie cu masa m pe un plan înclinat de unghi α, dacă forța de tracțiune F este paralelă cu planul înclinat și coeficientul de alunecare este μ? Cât reprezintă puterea consumată pentru învingerea frecărilor $P_{frecare}$ și pentru ridicarea saniei în câmp gravitațional P_{grav} din puterea $P_{activă}$?

Rezolvare

Conform figurii **17**:

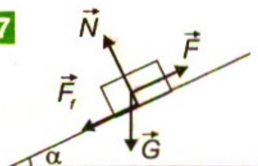
$$F = mg\sin\alpha + F_f = mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$$

$$P_{activă} = \vec{F} \cdot \vec{v} = (mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha) \cdot v;$$

$$P_{frecare} = \vec{F}_f \cdot \vec{v} = -\mu mgv\cos\alpha;$$

$$P_{gravitațională} = \vec{G}_t \cdot \vec{v} = -\mu mgv\sin\alpha.$$

Bilanțul puterilor: $P_{activ•} = |P_{frec}| + |P_{grav}|$ se verifică.



Înlocuim expresia vitezei $v = \frac{P_{activ•}}{mg \cdot (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$

în expresiile puterilor:

$$P_{grav} = -\frac{mg \cdot P_{activ^*} \cdot \sin\alpha}{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} = -\frac{P_{activ^*}}{1+\mu \mathrm{ctg}\alpha};$$

$$P_{frec} = -\frac{\mu \cdot mg \cdot P_{activ^*}\cos\alpha}{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} = -\frac{\mu \cdot P_{activ^*}}{\mathrm{tg}\alpha + \mu}.$$

Dacă $\mu = 0{,}1$ și $\alpha = 45°$, obținem $|P_{grav}| = \frac{P_{activ^*}}{1+0{,}1} \approx 91\% P_{activ^*}$

și $|P_{frec}| = \frac{0{,}1 \cdot P_{activ^*}}{1{,}1} \approx 9\% P_{activ^*}$.

TESTE

Copiază în caiet următoarele afirmații și răspunde cu A dacă afirmația respectivă este adevărată sau cu F dacă este falsă:

1. A F. Forța de greutate este o forță conservativă, deoarece lucrul mecanic al greutății între două puncte este același pe orice drum.

2. A F. Lucrul mecanic al greutății de-a lungul unui contur închis este nenul.

3. A F. În ipoteza în care mai multe forțe conservative se aplică asupra corpului, lucrul mecanic al acestora este aditiv.

4. A F. Forțe conservative sunt forțele al căror lucru mecanic nu depinde de drumul urmat între punctul inițial și punctul final, ci numai de pozițiile celor două puncte.

5. A F. Forțele de frecare sunt forțe de tip conservativ.

6. A F. Lucrul mecanic al forțelor de frecare depinde de forma drumului parcurs.

*7. A F. Forțele elastice sunt forțe ce au proprietatea că lucrul lor mecanic depinde de punctele prin care trece resortul.

*8. A F. La alungirea unui resort forțele elastice sunt rezistive.

*9. A F. Comprimând un resort forța elasică este motoare.

10. A F. Puterea mecanică este o mărime fizică scalară.

11. A F. Puterea mecanică reprezintă raportul dintre lucrul mecanic efectuat de o forță și intervalul de timp în care acționează forța.

Probleme

1. Să se indice forța cu caracter disipativ:
a) forța de frecare; b) forța elastică; c) forța de greutate; d) forța de apăsare normală.

2. Care dintre următoarele relații definește o putere mecanică:
a) $\frac{Fd}{T}$; b) $Fv\cos\alpha$; c) Lt; d) $\frac{mv}{t}$.

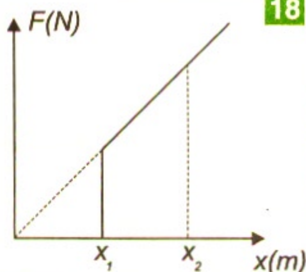
3. Watul este echivalent cu:
a) Js; b) $kgms^{-2}$; c) Nms^{-1}; d) Js^2.

4. Care este valoarea lucrului mecanic al forței de greutate, dacă pilotul unui avion cu masa totală m execută un „looping“ (un cerc) în plan vertical, raza cercului fiind R?
a) mgR; b) $-mgR$; c) $2mgR$; d) 0.

5. Aria suprafeței cuprinse între graficul forței, axa orizontală și cele două verticale duse prin extremități are următoarea semnificație fizică: 18
a) energie mecanică; b) lucru mecanic;
c) putere mecanică; d) spațiul parcurs.

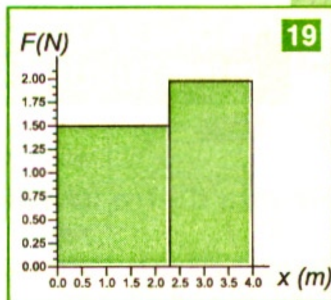
*6. Alegeți informația greșită referitoare la forța elastică:
a) este o forță conservativă;
b) este direct proporțională cu deformația;
c) la comprimarea unui resort inițial nedeformat lucrul ei mecanic este motor;
d) la destinderea unui resort inițial comprimat lucrul ei mecanic este motor;

7. În cazul în care un corp se mișcă rectiliniu și uniform pe o suprafață rugoasă:
a) coeficientul de frecare este nul;
b) lucrul mecanic efectuat de forța de frecare este mai mare decât lucrul mecanic efectuat de forța motoare;
c) lucrul mecanic efectuat de forța de frecare este mai mic decât lucrul mecanic efectuat de forța motoare;
d) lucrul mecanic efectuat de forța de frecare este egal cu lucrul mecanic efectuat de forța motoare.



8. O forță $F = 40$ N care își deplasează punctul de aplicație pe distanța $d = 2$ m, astfel că unghiul făcut de forță cu direcția de deplasare este $\alpha = 60°$, efectuează un lucru mecanic egal cu:
a) 40 J; b) 56,4 J; c) 64 J; d) 80 J.

9. Un lift ridică un corp cu G = 2000 N la înălțimea h = 10 m în timp t = 5 s. Motorul dezvoltă o putere egală cu:
a) 2 kW; b) 4 kW; c) 10 kW; d) 20 kW.



10. Lucrul mecanic efectuat de greutatea G = 800 N a unei mașini de spălat care se deplasează orizontal pe distanța d = 30 m, sub acțiunea altei forțe este:
a) 24 kJ; b) 800 J; c) 26,6 J; d) 0 J.

11. Ce valoare are lucrul mecanic care corespunde ariei de sub graficul forței $F = f(x)$ din figura **19** în situația în care coordonata ia valori de la 0 la 4 m?

12. Două corpuri cu masele m_1 și $m_2 = 2\ m_1$ sunt lăsate să cadă liber. Primul corp se află în cădere un timp t_1 = 2 s, iar al doilea corp t_2 = 4 s. Raportul lucrurilor mecanice L_1 / L_2 efectuate de greutățile celor două corpuri în timpul căderilor lor este:
a) 1/8; b) 1/4; c) 1/2; d) 1.

13. O mașină se deplasează cu viteza constantă de 36 km/h sub acțiunea unei forțe de tracțiune în valoare de 700 N, care acționează pe direcția de deplasare. Puterea dezvoltată de motor este:
a) 19,44 W; b) 70 W; c) 7 kW; d) 25,2 kW.

14. Un corp cu masa m = 20 kg este lansat pe o suprafață orizontală cu frecare, coeficientul de frecare fiind μ = 0,2 și cu viteza inițială v = 10 m/s. Puterea medie consumată de forța de frecare până la oprirea corpului este:
a) 50 W; b) 100 W; c) 200 W; d) 400 W.

15. Să se calculeze randamentul unui plan înclinat, dacă unghiul de înclinare a planului față de orizontală este egal cu unghiul de frecare.
a) 25%; b) 50%; c) 75%; d) 100%.

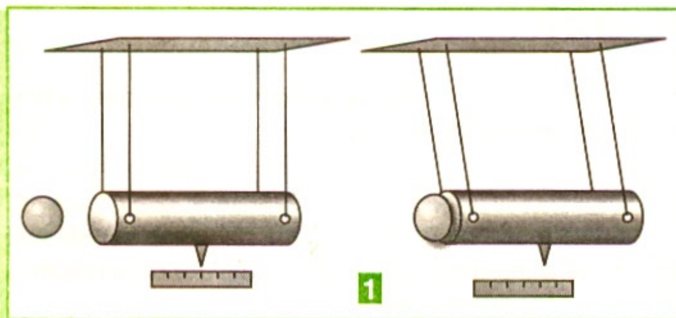
16. Lucrul mecanic la alungirea unui resort pe prima jumătate din alungire este mai mic decât lucrul mecanic efectuat pentru alungirea pe a doua jumătate din alungire:
a) de două ori; b) de trei ori; c) de patru ori; d) egal.

TEOREMA VARIAȚIEI ENERGIEI CINETICE A PUNCTULUI MATERIAL

Relația dintre lucrul mecanic și variația energiei unui corp

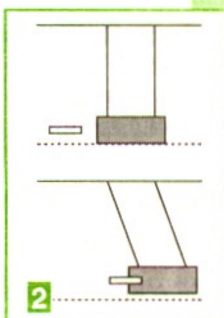
Energia unui sistem este măsura capacității acestuia de a efectua lucru mecanic. Când corpul *A* acționează cu forța F_{AB} asupra altui corp B în sensul deplasării, adică efectuează lucru mecanic ($L_{AB} > 0$), atunci corpul *A* cedează energie, iar corpul *B* primește aceeași energie. Energia acumulată (dobândită) de un corp prin schimbarea poziției sale într-un câmp de forțe (gravitaționale, elastice) este egală cu lucrul mecanic efectuat de forța care a acționat asupra corpului.
Deoarece energia unui sistem este legată de posibilitatea sistemului de a efectua lucru mecanic, energia sistemului va scădea când acesta efectuează lucru mecanic asupra altor sisteme și va crește în situația în care asupra sistemului se efectuează lucru mecanic.
Energia este o mărime fizică de stare, în timp ce lucrul mecanic este o mărime fizică de proces (sistemul evoluează dintr-o stare în altă stare).
Energiile studiate sunt de două feluri:
- *energie cinetică* - depinde de starea de mișcare a corpurilor sistemului;
- *energie potențială* - depinde de modificarea configurației sistemului de corpuri.

Energia cinetică a unui corp este energia care depinde de starea de mișcare. Considerăm cazul corpurilor punctiforme, ca să nu intervină deocamdată în discuțiile noastre și energia de rotație.
Se știe că pentru a pune în mișcare sau pentru a opri un corp, asupra lui trebuie să acționeze alte corpuri prin intermediul unor forțe pe o anumită distanță. Amintește-ți cum trebuie să oprești și să prinzi o minge sau un obiect lansat către tine! Trecerea unui corp din starea de repaus în stare de mișcare și invers se obține prin lucrul mecanic efectuat de forțe. Pentru a imprima aceeași viteză unor corpuri cu mase diferite trebuie să acționezi cu forțe diferite asupra acestor corpuri pe aceeași distanță.


1

Dacă acționezi cu o forță asupra unui corp de masă *m*, energia de mișcare este mai mare cu cât lucrul mecanic al forței de tracțiune sau de împingere este mai mare. Creșterea energiei de mișcare a unui pendul poate fi măsurată de lucrul mecanic efectuat de forțele exterioare care acționează asupra lui. **1** Cele două corpuri interacționează în procesul de ciocnire. Forța cu care acționează bila asupra pendulului

aflat în repaus produce o mică deformație locală (deci un lucru de deformație plastică) și o împingere pe o mică distanță până când bila rămâne în urma lui. Înseamnă că cineva a pierdut din energia de mișcare și cineva a câștigat-o parțial. Asupra fiecărui corp acționează forțe egale și de sens contrar, deci lucrurile mecanice vor fi unul activ și altul pasiv. Unul dintre ele duce la creșterea energiei cinetice a unui corp și respectiv la scăderea energiei cinetice a celuilalt. La ciocnirea corpurilor are loc o interacțiune însoțită de un schimb de energie cinetică. Pierderea de energie cinetică a unui glonț depinde de grosimea stratului penetrat. **2**



Un corp aflat în mișcare are energie cinetică, deoarece poate efectua lucru mecanic (apa care cade poate pune în rotație o turbină, vântul este utilizat pentru a roti morile de vânt, un copil care aleargă poate dărâma un scaun etc.).

Presupunem un corp cu masa *m* aflat pe o suprafață orizontală în repaus. Acționăm asupra lui cu o forță rezultantă F_{rez} care să îi imprime o mișcare rectilinie uniform accelerată, cu accelerația *a*. Corpul se deplasează pe distanța *d* și viteza lui devine *v*. **3**

Lucrul mecanic al forței F_{rez} este:

$$L_F = F_{rez} d$$

$$F_{rez} = ma. \text{ (conform principiului II).}$$

Obținem $L_F = mad.$

Folosim relația lui Galilei, $v^2 = 2ad$ și obținem:

$$L_F = \frac{mv^2}{2}.$$

Definim **energia cinetică** a unui corp cu masa *m* care se mișcă față de un sistem de referință inerțial cu viteza *v* ca fiind jumătate din produsul dintre masa corpului și pătratul vitezei corpului:

$$E_c = \frac{mv^2}{2}.$$

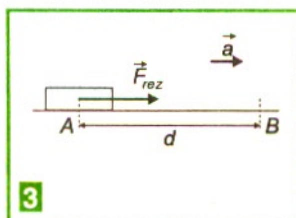
Deci energia cinetică a unui corp cu masa *m* față de un referențial semnifică fizic lucrul mecanic efectuat de o forță constantă pentru a aduce corpul din starea de repaus în starea de mișcare cu viteza *v*.

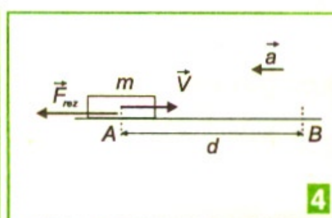
În cazul în care corpul cu masa *m* se află în mișcare cu viteza *v* față de un sistem de referință trebuie să acționăm cu o forță pentru a-l aduce în repaus. Dacă forța rezultantă este constantă, corpul va avea o mișcare rectilinie încetinită . **4** :

$$L_F = -m\,a\,d \Rightarrow$$

$$0 = v^2 - 2ad \Rightarrow a = \frac{v^2}{2d} \Rightarrow$$

$$L_F = -\frac{mv^2}{2} \Rightarrow |L_F| = \frac{mv^2}{2}.$$





Deci energia cinetică a unui corp cu masa *m*, care se mişcă cu viteza *v*, este egală cu modulul lucrului mecanic efectuat de o forţă rezultantă pentru a aduce corpul din starea de mişcare în cea de repaus.

Teorema variaţiei energiei cinetice a punctului material

Prima metodă

Dacă o forţă rezultantă constantă $\vec{F}$ acţionează asupra corpului de masă *m* într-un interval de timp Δt, această forţă provoacă o acceleraţie, adică o variaţie a vitezei în acest interval de timp:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}, \text{ unde } \vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Considerăm mişcarea rectilinie uniform accelerată a unui corp. **5** Viteza va fi tot pe direcţia acţiunii forţei şi în acelaşi sens cu viteza iniţială $\vec{v}_0$. Proiectăm vectorii pe această direcţie comună (*Ox*) şi obţinem o relaţie scalară:

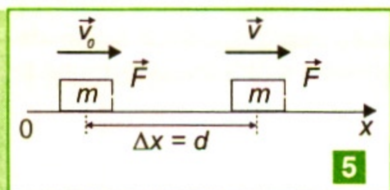
$$F = m\frac{(v - v_0)}{\Delta t} \text{ sau } F\Delta t = m(v - v_0)$$

Dacă înmulţim această relaţie cu viteza medie

$$v_m = \left(\frac{v + v_0}{2}\right),$$

obţinem

$$Fv_m\Delta t = \frac{m(v - v_0)(v + v_0)}{2}.$$



$$\text{sau} \quad F\Delta x = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2},$$

$$\text{adică } L_F = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Metoda a doua

Sub acţiunea forţei *F* corpul a parcurs o distanţă $\Delta x = d$ pe care a efectuat lucrul mecanic activ

$$L_F = F\Delta x = ma\Delta x.$$

Din ecuaţia lui Galilei, $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$, obţinem

$$a\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2}.$$

După înlocuire în expresia lucrului mecanic efectuat, obţinem:

$$L_F = m\frac{v^2 - v_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}.$$

Membrul din dreapta al acestei expresii depinde doar de masa și pătratele vitezelor momentane ale corpului la sfârșitul și, respectiv, la începutul intervalului de timp Δt de acțiune a forței F și nu depinde de vitezele pe care le atinge corpul în decursul acestui interval de timp. Spunem că lucrul mecanic al forțelor care acționează asupra corpului considerat măsoară variația energiei cinetice a acestuia, care trece dintr-o stare de mișcare în altă stare de mișcare:

$$L_{Frez} = E_{c_2} - E_{c_1} = \Delta E_c.$$

Aplicarea teoremei variației energiei cinetice

Variația energiei cinetice a unui corp considerat punctiform (față de dimensiunile corpurilor din mediul exterior) este egală cu lucrul mecanic al forței rezultante care produce această variație.

$$\Delta E_c = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = L_F \ .$$

Când asupra unui corp acționează pe direcția de mișcare mai multe forțe (active și rezistive) acestea sunt echivalente cu o forță rezultantă: $\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3}$. Forțele F_1 și F_2 sunt active (au semnul plus față de sensul pozitiv al axei de mișcare), iar F_3 este rezistivă (are semnul minus față de sensul negativ al axei de mișcare, de exemplu, forța de frecare). Lucrul mecanic este aditiv:

$$L_R = (F_1 + F_2 - F_3)\Delta x = L_{F_1} + L_{F_2} + L_{F_3},$$

unde $L_{F_1} > 0$, $L_{F_2} > 0$, și $L_{F_3} < 0$.

Variația energiei cinetice a unui punct material este egală cu suma algebrică a lucrurilor mecanice ale forțelor care acționează asupra lui în timpul corespunzător acestei variații:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = L_R.$$

Dacă lucrul mecanic total (al forței rezultante) este negativ, atunci energia cinetică scade. Dacă lucrul mecanic total este zero, atunci energia cinetică rămâne constantă.

Energia cinetică a corpului este o mărime fizică ce caracterizează starea de mișcare mecanică a acestuia, astfel că la trecerea corpului din starea de mișcare *A* în starea de mișcare *B*, energia cinetică variază cu $\Delta E_c = E_{CB} - E_{CA}$, variație care poate fi pozitivă, negativă sau nulă.

Dacă $\Delta E_c = 0$, $E_{CB} = E_{CA}$ și starea de mișcare mecanică a corpului se menține aceeași, corpul fiind în repaus sau în mișcare rectilinie și uniformă.

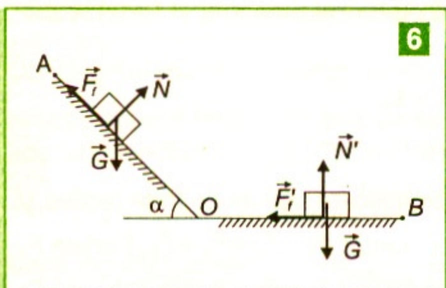
Modificarea stării de mișcare se face numai cu transfer de energie de la un corp la alt corp. Acest lucru implică o forță care să-și deplaseze punctul de aplicație, deci efectuarea unui lucru mecanic.

Probleme rezolvate

1. Un corp pornește din repaus din vârful unui plan înclinat cu unghiul $\alpha = 30$ și cu lungimea $l = 12$ m. Mișcarea corpului se face cu frecare, coeficientul de frecare la alunecare fiind $\mu = 0{,}2$ ($g = 10$ m/s²). Să se calculeze:
a) cu ce viteză ajunge corpul la baza planului înclinat;
b) dacă planul înclinat se continuă cu o porțiune orizontală pe care corpul se mișcă cu același coeficient de frecare, ce distanță parcurge corpul până la oprire?

Rezolvare

a) Se aplică teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și O: 6



$$\Delta E_{c_{A\to 0}} = L_{t_{A\to 0}} = L_{G_{A\to 0}} + L_{F_{fA\to 0}} + L_{N_{A\to 0}}$$

$$L_{N_{A\to 0}} = 0$$

deoarece apăsarea normală este perpendiculară pe traiectorie.

$$L_{G_{A\to 0}} = mgh_{A0} = mgl\sin\alpha$$

$$L_{F_{fA\to 0}} = -F_f \cdot l = -\mu Nl = -\mu mg \cdot l \cdot \cos\alpha$$

$$\text{Dar } \Delta E_{c_{A\to 0}} = E_{c_0} - E_{c_A} = E_{c_0} = \frac{mv_0^2}{2},$$

deoarece corpul nu are inițial energie cinetică pentru că pornește din repaus. Obținem

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgl\sin\alpha - \mu mgl\cos\alpha$$

$$\text{deci } v_0 = \sqrt{2gl(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} = 8{,}86 \text{ m/s}.$$

b) Presupunând că în final corpul se oprește în punctul B, unde $v_B = 0$, aplicăm iar teorema de variație a energiei cinetice între punctele O și B.

$$\Delta E_{c_{0\to B}} = L_{t_{0\to B}} = L_{G_{0\to B}} + L_{N'_{0\to B}} + L_{F'_{f0\to B}}$$

$$L_{F'_f} = -\mu mgOB$$

$$L_{G_{0\to B}} = 0 \text{ și } L_{N'_{f0\to B}} = 0$$

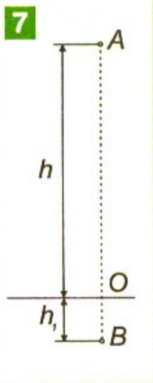
$$\Delta E_{c_{0\to B}} = E_{c_B} - E_{c_0} = -E_{c_0} = -\frac{mv_0^2}{2};$$

obținem

$$\frac{-mv_0^2}{2} = -\mu mgOB \Rightarrow OB = \frac{v_0^2}{2\mu g} = \frac{l}{\mu}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$$

$OB = 19{,}62$ m.

2. Un copil aflat la etajul 9 al unui bloc, la înălțimea $h = 25$ m, scapă din greșeală o bilă metalică cu masa $m = 100$ g. Aceasta cade pe pământ și produce o groapă cu adâncimea $h_1 = 10$ cm. Ce forță frânează bila? ($g = 10$ m/s²)



Rezolvare

Aplicăm pentru sistemul bilă - Pământ teorema de variație a energiei cinetice **7**:

$$\Delta E_{c_{A\to B}} = L_{G_{A\to B}} + L_{F_{A\to B}}$$
$$\Delta E_{c_{A\to B}} = E_{C_A} - E_{C_O} = 0,$$

deoarece bila a pornit din repaus și în final a ajuns într-o stare de repaus. Deci

$$L_G + L_F = 0 \Rightarrow L_{F_{A\to B}} = -L_{G_{A\to B}}$$
$$L_{G_{A\to B}} = mg(h + h_1)$$
$$L_{F_{A\to B}} = -F \cdot h_1.$$

Obținem $-Fh_1 = -mg(h + h_1) \Rightarrow F = \dfrac{mg(h + h_1)}{h_1} = 251\,\text{N}.$

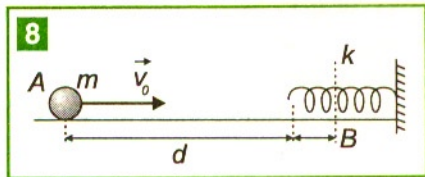
3. Un corp cu masa $m = 2$ kg se mișcă cu viteza $v_0 = 3$ m/s pe un plan orizontal cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu = 0{,}1$. La distanța $d = 10$ cm de punctul de plecare, corpul întâlnește un resort cu constanta elastică $k = 400$ N/m inițial nedeformat, fixat de un perete. Să se afle comprimarea maximă a resortului ($g = 10$ m/s²).

Rezolvare

Notăm comprimarea maximă a resortului cu x. Pentru sistem, aplicăm teorema de variație a energiei cinetice între punctele A și B **8**:

$$\Delta E_{c_{A\to B}} = L_t = L_{F_{fA\to B}} + L_{F_{elA\to B}} + L_{G_{A\to B}} + L_{N_{A\to B}}.$$

Deoarece greutatea și forța de apăsare normală sunt perpendiculare pe deplasare, lucrul lor mecanic este nul:



$$L_{F_{fA\to B}} = -F_f(d + x) = -\mu mg(d + x),$$

deoarece $F_f = \mu N = \mu mg$; $L_{F_{elA\to B}} = -\dfrac{kx^2}{2}$,

deoarece forța elastică se opune mișcării corpului și este o forță rezistivă;

$\Delta E_{c_{A\to B}} = E_{cB} - E_{cA} = -\dfrac{mv_0^2}{2}$, deoarece în B corpul se oprește și $E_{CB} = 0$.

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -\mu mg(d + x) - \frac{kx^2}{2} \Rightarrow kx^2 + 2\mu mgx + 2\mu mgd - mv_0^2 = 0$$

$$x = \frac{-\mu mg + \sqrt{(\mu mg)^2 - k(2\mu mgd - mv_0^2)}}{k} = 20{,}48\text{ cm}.$$

4. Un pistol jucărie are un resort cu constanta de elasticitate $k = 10^2$ N/m și o ventuză cu tijă de $m = 10$ g. Dacă deformația resortului este $x_0 = 5$ cm să se afle viteza cu care este aruncată ventuza atunci când este deblocat resortul.

Rezolvare

Aplicăm teorema variației energiei cinetice, ținând cont că inițial ventuza nu are viteză, $E_{ci} = 0$ iar în final resortul nu este comprimat, $E_{ci} = E_{pf}$, obținem:

$$\frac{k \cdot x_0^2}{2} = \frac{m \cdot v^2}{2} \Rightarrow k \cdot x_0^2 = m \cdot v^2 \Rightarrow v^2 = \frac{k}{m} \cdot x_0^2 \Rightarrow v = x_0\sqrt{\frac{k}{m}} = 5\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Probleme

1. În formula matematică a teoremei de variație a energiei cinetice a punctului material $\Delta E_c = L$, lucrul mecanic este cel efectuat de :
a) forțele active; b) toate forțele care acționează asupra unui punct material, excepție făcând forțele de frecare; c) forțele conservative; d) rezultanta tuturor forțelor care acționează asupra punctului material

2. Asupra unui corp cu masa $m = 2$ kg, care se mișcă inițial cu viteza $v = 10$ m/s, se efectuează un lucru mecanic motor $L = 300$ J. Viteza corpului devine:
a) 10 m/s; b) 20 m/s; c) 30 m/s; d) 40 m/s.

3. Viteza unei mașini cu masa $m = 500$ kg crește de la $v_1 = 18$ km/h până la $v_2 = 72$ km/h. Lucrul mecanic efectuat asupra mașinii este:
a) 100 kJ; b) 6250 J; c) 3750 J; d) 93,75 kJ.

4. Un corp cu masa $m = 1$ kg aflat în mișcare cu viteza $v = 20$ m/s este frânat de o forță $F = 10$ N. Spațiul parcurs de corp până la oprire este:
a) 5 m; b) 10 m; c) 20 m; d) 40 m.

5. Un mobil cu viteza inițială $v_0 = 4$ m/s, se mișcă pe un traseu orizontal rectiliniu cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu = 0{,}01$.($g = 10$ m/s²). Spațiul parcurs de mobil până la oprire este:
a) 50 m; b) 60 m; c) 80 m; d) 100 m.

6. Un corp cu masa $m = 10$ kg se mișcă fără frecare pe o suprafață netedă având viteza v_0 la momentul inițial. Asupra corpului se va exercita o forță $F = 400$ N, în sens contrar vitezei, astfel că viteza corpului se reduce la jumătate în timpul deplasării pe o distanță $d = 15$ m. Valoarea vitezei inițiale este:
a) 12,65 m/s; b) 20 m/s; c) 28,3 m/s; d) 40 m/s.

7. Un glonte cu masa $m = 50$ g se trage dintr-o armă cu viteza inițială $v_0 = 500$ m/s. Viteza cu care iese glontele, după ce străbate un bloc de lemn cu lungimea $l = 2$ m de jos în sus, dacă întâmpină o forță de frecare $F_f = 1124{,}5$ N este:
a) 400 m/s; b) 300 m/s; c) 200 m/s; d) 100 m/s.

Sistemele în care există interacțiuni prin forțe conservative și care își modifică configurația se caracterizează prin energie potențială.

Energia potențială (gravitațională sau elastică) a unui sistem aflat într-o anumită stare caracterizează starea respectivă și este independentă de evoluțiile anterioare ale sistemului și de vitezele părților componente ale acestui sistem. Rezultă că valoarea ei depinde de pozițiile relative ale părților care interacționează când se găsesc în acea stare.

Lucrul mecanic efectuat de forțele conservative care acționează într-un sistem este egal și de semn opus cu variația energiei potențiale a acestuia:

$$L_{A\to B} = -\Delta E_{pA-B} = E_{pA} - E_{pB}$$

unde E_{pA} reprezintă energia potențială a sistemului în starea inițială, iar E_{pB} reprezintă energia potențială a sistemului în starea finală.

Observăm că variația energiei potențiale a sistemului este definită cu ajutorul noțiunii de lucru mecanic.

Putem spune că energiile potențiale sunt funcții de stare. Pentru a exprima energia potențială a unui sistem mecanic considerat izolat de alte corpuri, trebuie să alegem o stare de referință căreia îi atribuim prin convenție o valoare a energiei potențiale față de un punct de referință. Valoarea energiei potențiale atribuită punctului de referință va fi convenabil aleasă. Alegând altă valoare pentru energia potențială în punctul de referință, se modifică energia potențială a oricărui punct.

Prin urmare, energia potențială a unui sistem nu este unic definită, ea depinzând de valoarea atribuită punctului de referință.

Noțiunea de energie potențială nu se poate defini în cazul sistemelor în care acționează forțe de tip neconservativ.

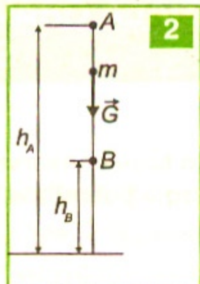
Energia potențială se exprimă cu ajutorul parametrilor de poziție. Nu ne interesează etapele intermediare și parametrii acestora în determinarea unei variații de energie potențială. Variația de energie potențială a unui sistem nu depinde de modul în care evoluează de la poziția „inițială" către cea ulterioară („finală").

Energia potențială gravitațională

Starea sistemului corp-Pământ aflat în interacțiune gravitațională este caracterizată de energia potențială gravitațională, deoarece părțile sistemului interacționează prin forțe de atracție gravitaționale care sunt de tip conservativ și sistemul își poate modifica configurația.

Energia potențială gravitațională depinde de poziția relativă a corpului față de Pământ, adică de starea de interacțiune la distanță prin intermediul câmpului de forțe de atracție gravitațională. Energia potențială gravitațională a sistemului format dintr-o masă de apă și Pământ (adică a masei de apă aflate în câmpul gravitațional al Pământului) poate fi stocată într-un lac de acumulare. Atunci când apa este lăsată să cadă de la o anumită înălțime, energia potențială gravitațională se transformă în





energie cinetică **1**. Energiile potențiale nu depind de modul în care părțile sistemului sunt aduse într-o anumită poziție relativă, ci doar de starea sistemului la momentul considerat. Energiile potențiale sunt energii „stocate“ (înmagazinate) ca energia unei greutăți ridicate la un anumit nivel. Când se ridică un corp la un anumit nivel, prin efectuarea de lucru mecanic de către o forță din exterior, sistemul corp-Pământ „acumulează“ sau „înmagazinează“ energie sub formă de energie potențială gravitațională. Aceasta este o energie latentă (în așteptare), deoarece atunci când corpul este eliberat de legăturile care îl țin, acesta cade și poate ciocni, deplasa sau deforma un alt corp întâlnit (transferându-i integral sau parțial energia).

Energia înmagazinată în timpul ridicării corpului la diferite nivele față de un nivel de referință măsoară capacitatea de efectuare a unui lucru mecanic sub acțiunea forței de greutate. Ne interesează doar creșterile sau scăderile nivelelor energetice când se efectuează un schimb de energie sub formă de lucru mecanic.

a. Energia potențială gravitațională în imediata vecinătate a Pământului

Între un corp de masă *m* și Pământ se manifestă forțe de interacțiune gravitaționale care depind de distanța dintre acestea. Vrem să exprimăm cantitativ energia potențială asociată atracției gravitaționale asupra corpului de masă *m* din partea Pământului.

Fie un corp cu masa *m* care este lăsat liber de la înălțimea h_A. Sub acțiunea greutății corpul cade până la înălțimea h_B. **2** Greutatea efectuează lucru mecanic și sistemul își modifică configurația, deci:

$$\Delta E_{p_{A\to B}} = -L_{A\to B}$$
$$E_{p_B} - E_{p_A} = -mg(h_A - h_B)$$
$$E_{pA} = E_{pB} + mgh_A - mgh_B.$$

Considerând punctul *B* ca punct de referință observăm că energia potențială în A, depinde de valoarea energiei potențiale atribuită acestui punct. Alegând punctul de referință B pe sol, $\Delta E_{p_A} = E_{p_B} + mgh_A$, deoarece $h_B = 0$.

Atribuim prin convenție punctelor pe sol valoarea zero pentru energia potențială deci:

$$E_{p_B} = 0 \text{ °i } E_{pA} = mgh_A.$$

Deoarece punctul *A*, a fost ales arbitrar, obținem: $E_p = mgh$.

Observație: deși în multe probleme se cere energia potențială gravitațională a corpului, trebuie precizat că este vorba de energia potențială gravitațională a sistemului corp - Pământ.

Semnul minus al variației energiei potențiale $(-\Delta E_{pg})$ ne arată că energia potențială scade (se consumă sau se transformă în altă formă de energie): lucrul mecanic al forței de greutate este egal cu scăderea energiei potențiale gravitaționale și depinde doar de pozițiile inițială și finală.

Diferența de energie potențială gravitațională între două nivele nu se schimbă, indiferent de valoarea aleasă pentru nivelul de referință (valoarea pozitivă, zero sau negativă).

b. Energia potențială gravitațională la distanțe mari de suprafața Pământului* (pentru curioşi şi performeri)

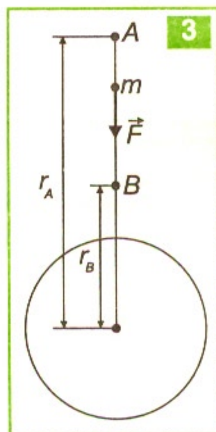
Deoarece forța de atracție gravitațională

$$F = k\frac{Mm}{r^2}$$

nu este constantă, ci depinde de distanța dintre punctul material de masă m și centrul Pământului, calculăm o forță de atracție medie, în cazul în care punctul material se deplasează între punctele A și B aflate la distanțele r_A și, respectiv, r_B, de centrul Pământului, ca media geometrică a forțelor de atracție calculate în cele două stări:

$$F_{medie} = \sqrt{F_A F_B} = \frac{kmM}{r_A r_B},$$

unde M este masa Pământului.



Deoarece forța de atracție își deplasează punctul de aplicație din A în B în direcția și sensul său, ca în figura 3 efectuează lucru mecanic:

$$L_{A\to B} = F_{medie}(r_A - r_B) = \frac{kmM}{r_B} - \frac{kmM}{r_A}$$

Deoarece $\Delta E_{p_{A\to B}} = -L_{A\to B}$,

$$E_{p_B} - E_{p_A} = -\frac{kmM}{r_B} + \frac{kmM}{r_A}$$

$$E_{p_B} = E_{p_A} - \frac{kmM}{r_B} + \frac{kmM}{r_A}.$$

Prin convenție se alege punctul A la infinit, astfel că $r_A \to \infty$ și $E_{p_B} = E_{p_A} - \frac{kmM}{r_B}$.

Atribuim prin convenție punctelor de la infinit valoarea zero a energiei potențiale a sistemului și obținem:

$$E_{p_B} = -\frac{kmM}{r_B}$$

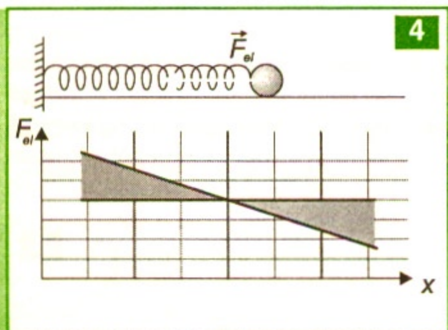
$$E_p = -\frac{kmM}{r}.$$

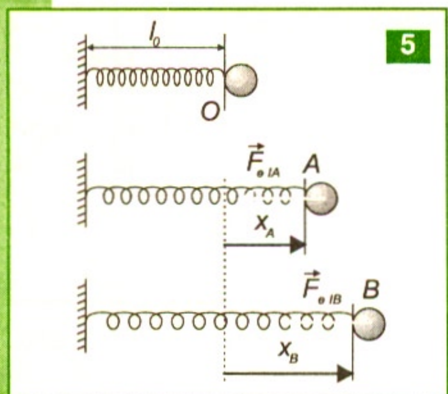
c. Energia potențială elastică *

Considerăm un sistem format dintr-un resort elastic fixat rigid la un capăt și un corp la celălalt capăt asupra căruia acționează o forță elastică $\vec{F}$ 4. Inițial resortul nu este deformat. Constanta elastică a resortului este *k*. Dacă resortul elastic este supus acțiunii unei forțe, acesta se alungește de la *A* la *B*. 5

Forțele elastice fiind conservative și deoarece sistemul corp-resort își modifică configurația îi putem atribui energie potențială elastică:

$$\Delta E_{pA\to B} = -L_{F_{elA\to B}}.$$





Cum $L_{F_{elA\to B}} = -\frac{kx_B^2}{2} + \frac{kx_A^2}{2}$ obținem:

$$E_{p_B} - E_{p_A} = \frac{kx_B^2}{2} - \frac{kx_A^2}{2}$$

$$E_{p_B} = E_{p_A} + \frac{kx_B^2}{2} - \frac{kx_A^2}{2}.$$

Energia potențială în *B* depinde de valoarea energiei potențiale atribuite sistemului corp-resort în punctul *A*.

Considerând că punctul *A* coincide cu punctul *O*, adică $x_A = 0$

obținem $E_{p_B} = E_{p_A} + \frac{kx_B^2}{2}$.

Alegem valoarea zero pentru energia potențială elastică, în situația în care resortul nu este deformat $E_{p_A} = 0$ și obținem:

$$E_{p_B} = \frac{kx_B^2}{2}$$

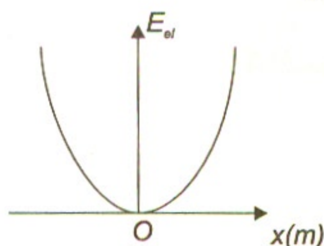
$$E_{p_{elastic^*}} = \frac{kx^2}{2}.$$

Graficul $E_{p\ elastică}$ în funcție de deformație este o parabolă cu minimul egal cu zero în punctul O. 6

În cazul unui corp legat de un resort elastic deformat, capacitatea de a efectua lucru mecanic depinde de starea sau nivelul de tensionare a spirelor (care depinde implicit de pozițiile relative ale corpului față de spire, deci de deformarea resortului). Un resort comprimat înmagazinează energie potențială elastică în câmpul forțelor de interacțiune. Energia potențială de interacțiune depinde doar de distanța dintre corpuri, adică de poziția lor relativă în câmpul forțelor de interacțiune.

Pentru a comprima (sau alungi) un resort, deplasăm capătul liber al resortului pe distanța *x* (față de poziția de echilibru) sub acțiunea forței $\vec{F}$, egală și de sens contrar forței elastice $\vec{F}_e$. Lucrul mecanic efectuat de această forță produce o creștere a energiei potențiale a sistemului resort-corp.

Dacă sistemul resort-corp este comprimat și apoi lăsat liber, energia potențială elastică va descrește. Această energie potențială caracterizează sistemul corp-resort aflat într-o anumită stare în care acționează forțe elastice de o anumită intensitate. Energia potențială poate fi stocată atunci când resortul este blocat, deoarece starea de deformare nu se schimbă.



Observăm că dacă lăsăm liber un corp dintr-un punct aflat la o anumită înălțime de suprafața Pământului, acesta coboară și energia potențială gravitațională scade.
O scădere a energiei potențiale gravitaționale se obține dacă lăsăm liber orice corp aflat în câmpul gravitațional al Pământului.
De asemenea, dacă un resort este comprimat sau alungit și se lasă liber, el tinde să revină în poziția în care nu este deformat și prin urmare energia potențială elastică scade.

În toate situațiile prezentate anterior, sistemele fizice lăsate libere evoluează în sensul scăderii energiei potențiale, indiferent dacă aceasta este de natură gravitațională sau elastică.
Aceste energii potențiale nu depind de modul în care sistemul a ajuns în această stare, ci doar de starea lui la momentul considerat. Ciocnirile dintre corpuri pot fi elastice sau plastice.

Pentru a caracteriza starea de mișcare a unui corp față de referențialul ales, apelăm la energia cinetică a corpului față de acesta. Dacă un resort comprimat este deblocat, atunci resortul acționează cu o forță elastică asupra corpului cu care ajunge în contact și îl deplasează, efectuând un lucru mecanic. Viteza imprimată corpului depinde de lucrul mecanic efectuat de forța elastică. Atunci când lăsăm să cadă un corp aflat la un anumit nivel față de Pământ sau deblocăm un resort comprimat aflat în apropierea unui corp, energiile potențiale respective (gravitaționale sau elastice) se transformă în energie cinetică. Poți constata că energia cinetică a unui corp de masă m care se mișcă cu o anumită viteză v nu depinde de procesul prin care a ajuns în această stare de mișcare. Energia cinetică a corpului aflat într-o anumită stare de mișcare față de un referențial este egală doar cu lucrul mecanic total efectuat de forțele (indiferent de natura lor) care acționează asupra lui și îl aduc din starea de repaus relativ în starea de mișcare relativă cu viteza v. În această stare poate ajunge și dacă este lăsat să cadă liber în câmpul de forțe gravitaționale sau este împins (sau tras) în câmpul forțelor elastice. Energiile cinetice ale corpurilor aflate într-o anumită stare de mișcare depind de inerția lor și de cât de repede se mișcă, indiferent de orientarea mișcării. Energiile cinetice se pot considera „nestocate" în cursul interacțiunilor, deoarece forțele de interacțiune se translatează pe o anumită distanță.

TESTE

Copiază în caiet următoarele afirmații și răspunde cu A dacă afirmația respectivă este adevărată sau cu F dacă este falsă:

1. A F. Energia potențială gravitațională este unic definită.
2. A F. Un corp are energie potențială gravitațională dacă urcă în câmp gravitațional.
3. A F. Dacă greutatea efectuează un lucru mecanic, variația energiei potențiale gravitaționale este pozitivă.
4. A F. În toate punctele unui plan orizontal energia potențială gravitațională are aceeași valoare.

*5. A F. Un resort deformat posedă energie potențială elastică.

*6. A F. Pentru a defini energia potențială a unui resort trebuie să alegem un nivel de referință.

Probleme

*1. Energia potențială:
a) este unic definită; b) este o mărime de stare; c) este o mărime de proces; d) nu depinde de alegerea sistemului de referință.

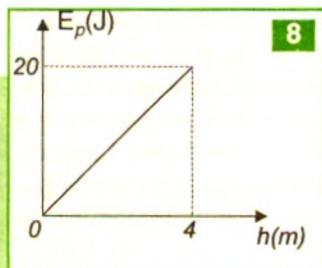
2. Un sportiv cu masa m_1 aleargă de două ori mai repede decât un alt sportiv a cărui masă este m_2. Relația dintre masele celor doi sportivi, dacă energiile lor cinetice sunt egale este:
a) $m_1 = m_2$; b) $4m_1 = m_2$; c) $m_1 = 4m_2$; d) $m_1 = 2m_2$.

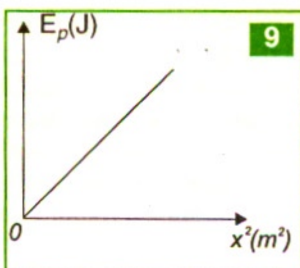
3. Dacă un corp cu masa $m = 100$ g cade de la înălțimea $h = 20$ m, la jumătatea distanței față de sol energia potențială gravitațională este:
a) 5 J; b) 10 J; c) 15 J; d) 20 J.

*4. În graficul din figura 8 este reprezentată energia potențială gravitațională în funcție de înălțime ($g = 10$ m/s²). Masa corpului este:
a) 100 g; b) 200 g; c) 500 g; d) 1 kg.

*5. Un resort este comprimat cu $x = 5$ cm, fiind menținut în această stare de o forță F = 20 N. Energia potențială a resortului este: a) 0,1 J; b) 0,5 J; c) 1 J; d) 5 J.

*6. Panta graficului din figura 9 reprezintă:
a) constanta elastică a unui resort; b) dublul constantei elastice a unui resort;
c) jumătate din constanta elastică a unui resort;
d) un sfert din constanta elastică a unui resort.





*7. Două resorturi cu constante elastice $k_1 = 40$ N/m și, respectiv, $k_2 = 80$ N/m legate în serie susțin un corp de masă m. Raportul între energiile potențiale ale resorturilor E_1/E_2 este:
a) 2; b) 0,5; c) 4; d) 0,25.

Energia mecanică – mărime de stare

Energia se poate prezenta în diferite forme: energie mecanică (cinetică și potențială), electrică, magnetică, internă, chimică, nucleară etc. Știi din clasele anterioare de gimnaziu că diversele forme de energie pot trece dintr-o formă în alta, în cantități echivalente.

Energia mecanică măsoară capacitatea unui sistem mecanic de a efectua lucru mecanic. Formele energiei mecanice depind de starea de mișcare (energia cinetică) și de poziția relativă a părților sistemului în câmpurile de forțe de interacțiune (energiile potențiale).

Energia mecanică a unui sistem mecanic reprezintă suma dintre *energia cinetică* și *energiile potențiale (gravitaționale, elastice)*:

$$E_m = E_c + E_p.$$

Deoarece fiecare dintre aceste energii caracterizează starea unui sistem dintr-un anumit punct de vedere, putem spune că și energia totală caracterizează starea, adică energia mecanică are o anumită valoare pentru un anumit sistem aflat într-o anumită stare. Schimbarea stării de repaus sau de mișcare relativă, ca și schimbarea stării cu o anumită configurație determină schimbări (variații) de energie mecanică. Fiecărei stări de mișcare sau, respectiv, configurații ale unui sistem mecanic îi corespunde o energie cinetică, respectiv, potențială. Energia mecanică depinde de starea sistemului la un moment dat și nu depinde de evoluția anterioară. Energia potențială depinde numai de distanța dintre corpuri și nu depinde de modul în care corpurile sunt aduse într-o anumită poziție relativă în câmpul de forțe elastice sau gravitaționale. Energia caracterizează starea sistemului la un anumit moment de timp în procesul de evoluție spre alte stări.

Conceptul de energie include toate formele de energie a corpurilor aflate în diferite stări de mișcare sau stări de interacțiune (în care mișcarea nu este direct observabilă). Acest concept leagă mecanica de celelalte domenii ale fizicii.

Când un corp acționează cu o forță asupra altui corp, adică efectuează un lucru mecanic asupra celui de-al doilea corp, se transferă energie de la primul către al doilea. Primul corp pierde energie, în timp ce al doilea câștigă energie. La rândul lui, acesta poate să efectueze un lucru mecanic.

În cazul ciocnirilor a două corpuri, deformările elastice apărute nu depind de faptul că cele două corpuri se apropie sau se depărtează. În orice corp elastic energia potențială de deformație elastică este „înmagazinată" în câmpurile forțelor de interacțiune dintre atomii săi, deoarece atomii care se apropie mai mult vor interacționa mai puternic, prin forțe interatomice.

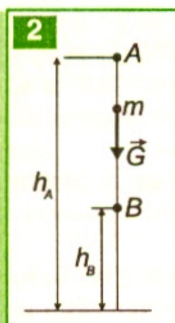
Știi ce forme de energie se transformă pe durata săriturii atletului peste o ștachetă cu o prăjină elastică ? 1 Energia mecanică (suma dintre energiile cinetică, cea potențială elastică a prăjinii și cea gravitațională) a sistemului om-prăjină-Pământ sau om în câmpurile de forțe elastice și gravitaționale nu este constantă din cauza pierderilor de energie prin lucrul mecanic al forțelor de frecare



Lucrul mecanic al forțelor de frecare este negativ și energia mecanică scade, fiind parțial transformată în energie internă care duce la creșterea temperaturii, deci crește energia cinetică de agitație a moleculelor și atomilor. Energia internă nu ne interesează deocamdată. Energia mecanică a unui sistem nu se modifică dacă sistemul este izolat, adică nu interacționează cu mediul exterior lui. Neglijând forțele de frecare, facem o idealizare pentru a putea considera într-un anumit interval de timp că energia mecanică se conservă. Dar dacă există frecări, corpul poate să se încălzească, deci crește energia de mișcare la nivel molecular și atomic. Transferul de energie se face, în acest caz, sub formă de căldură, care este o mărime de proces ca și lucrul mecanic. Lucrul mecanic și căldura nu pot caracteriza o anumită stare, ci numai procesul de trecere dintr-o stare în altă stare.
În concluzie, energia mecanică (cinetică sau potențială) este o mărime de stare, în timp ce lucrul mecanic și căldura sunt mărimi de proces. Energia și lucrul mecanic se măsoară în joule. Se mai spune că lucrul mecanic și căldura sunt forme ale schimbului de energie dintre un sistem și mediul exterior.

Condițiile în care energia mecanică a unui sistem se conservă

Considerăm un sistem izolat format din două corpuri care nu interacționează cu alte corpuri. Presupunem că cele două corpuri interacționează între ele prin forțe de tip conservativ.
Considerăm cazul în care sistemul este format dintr-un punct material și Pământ. Sub acțiunea forțelor conservative, punctul material se deplasează și se produce astfel o variație continuă a energiilor cinetică și potențială. **2** Conform teoremei de variație a energiei cinetice $\Delta E_{c_{A \to B}} = L_{A \to B}$, dacă deplasarea corpului, considerat punct material, se face între punctele *A* și *B*.



Dar $L_{A \to B} = -\Delta E_{p_{A \to B}}$.
Obținem:

$$\Delta E_{c_{A \to B}} = -\Delta E_{p_{A \to B}} \Rightarrow E_{c_B} - E_{c_A} = -(E_{p_B} - E_{p_A})$$

adică:

$$E_{cA} + E_{pA} = E_{cB} + E_{pB} \Rightarrow E_{m_A} = E_{m_B}.$$

Legea conservării energiei mecanice se exprimă prin relația:

$$E_c + E_p = \text{const.}$$

Legea conservării energiei este valabilă pentru un sistem ideal izolat (în care se neglijează acțiunea forțelor de frecare și acțiunea unor forțe active din exterior) plasat în câmp de forțe gravitaționale sau de forțe elastice. Aceste forțe sunt numite *forțe conservative.* Într-un asemenea sistem izolat, care evoluează trecând prin diverse stări, energia totală este constantă pentru oricare dintre stări ($E_{mecanică}$ = const.).
Atenție: în cazul în care forțele de frecare nu sunt neglijbile, energia mecanică nu mai rămâne constantă, deoarece o parte (ΔE_m) se consumă prin lucrul mecanic al forțelor de frecare ($\Delta E_m = L_{F.frecare}$), iar forțele de frecare fiind forțe rezistive au lucrul mecanic

negativ. Lucrul mecanic al forțelor de frecare are ca efect scăderea energiei mecanice totale, iar lucrul mecanic al forțelor active din exteriorul sistemului are ca efect creșterea energiei mecanice totale ($\Delta E = L_{F.active}$), deoarece forțele active sunt forțe motoare, iar lucrul lor mecanic este pozitiv.

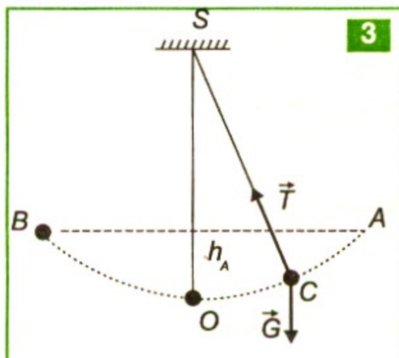
Aplicarea legii conservării energiei mecanice

Exemple:

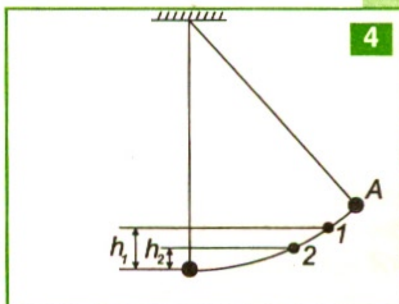
1) Mișcarea unui pendul gravitațional (un corp de mici dimensiuni de masă m legat la capătul liber al unui fir inextensibil). 3

Corpul suspendat de un fir ideal se află în repaus în poziția O, căreia îi atașăm valoarea zero pentru energia potențială $E_p = 0$.

Dacă în punctul O imprimăm corpului o viteză, corpul începe să se miște pe o traiectorie circulară față de punctul de susținere S. Dacă neglijăm efectul forțelor de frecare, corpul se va mișca simetric față de punctul O și vom spune că pendulează. Pentru sistemul corp-Pământ, greutatea este o forță conservativă. Tensiunea în fir fiind perpendiculară în permanență pe traiectorie, nu efectuează lucru mecanic. Pentru sistemul corp-Pământ putem aplica legea conservării energiei mecanice.



În punctul O sistemul are numai energie cinetică și pe măsură ce corpul se deplasează, energia cinetică scade, iar energia potențială crește, suma lor rămânând în permanență constantă. În punctul A, sistemul are numai energie potențială, deoarece corpul are viteza zero.



Între pozițiile 1 și 2 din figura 4, lucrul mecanic efectuat de forța de greutate este egal cu scăderea energiei potențiale:

$$L_{1\to2} = mg\Delta h_{12} = E_{p,g1} - E_{p,g2}.$$

În schimb, creșterea energiei cinetice a corpului între aceste stări este egală cu lucrul mecanic efectuat de greutatea corpului:

$E_{c2} - E_{c1} = L_{1\to2}$, obținem $L_{1\to2} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$.

Rezultă că:

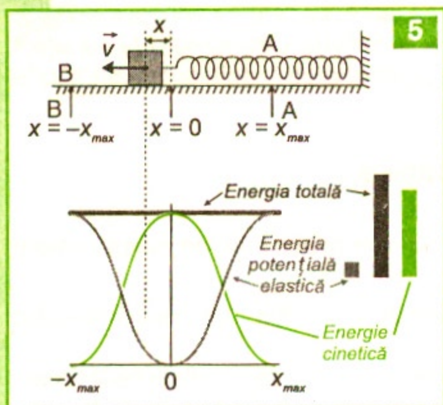
$E_{p,g1} - E_{p,g2} = E_{C2} - E_{C1}$ sau $E_{C1} + E_{p,g1} = E_{C2} + E_{p,g2} = const.$,

deci $E_c + E_p = \text{const.}$

În general: $\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2 = \text{constantă}$.

În concluzie, energia mecanică totală a unui sistem izolat, în care acționează forțe conservative, se conservă.

La revenirea din punctul A în punctul O, energia potențială descrește și crește energia cinetică, dar suma lor este tot constantă. Prin urmare, corpul revine în punctul O



de unde a plecat cu aceeași valoare a energiei cinetice. Pe porțiunea *OB* și *BO*, lucrurile se petrec la fel.

În această mișcare periodică are loc în permanență transformarea energiei cinetice în energie potențială și invers, dar suma lor se păstrează constantă.

Această proprietate se folosește în practică la pendula unui ceas. Evident nu putem face abstracție de forțele de frecare, numai că energia disipată de acestea este compensată prin anumite metode.

2) Mișcarea unui pendul elastic (un corp de masă *m* legat de capătul liber al unui resort elastic). Se neglijează efectul forțelor de frecare.

În figura 5, resortul de constantă *k* este alungit pe distanța x_{max} și apoi este lăsat liber. Acest pendul oscilează între două poziții extreme în care viteza devine nulă. Lucrul mecanic efectuat de forțele elastice între două stări 1 și 2 măsoară variația energiei potențiale luată cu semn schimbat:

$$L_{F_e} = E_{p,e1} - E_{p,e2} = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2},$$

sau variația energiei cinetice a corpului:

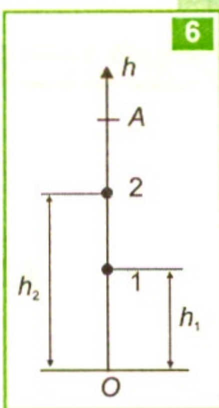
$$L_{F_e} = E_{c2} - E_{c1} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$\Rightarrow E_{c1} + E_{p,e1} = E_{c2} + E_{p,e2} \quad sau \quad \frac{mv_1^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + \frac{kx_2^2}{2}.$$

Pentru sistemul corp-resort am putut aplica legea de conservare a energiei mecanice, deoarece sistemul poate fi considerat izolat, iar forțele elastice sunt de tip conservativ. Inițial, în poziția în care resortul este deformat, sistemul are numai energie potențială elastică. Lăsat liber sub acțiunea forței elastice, corpul revine spre poziția de echilibru, în care resortul nu este deformat. În acest proces, energia potențială scade și crește energia cinetică, suma lor rămânând constantă. În poziția $x = 0$, sistemul are numai energie cinetică. În virtutea inerției, corpul își continuă mișcarea din punctul *O* până într-un punct *B* situat simetric în raport cu punctul *A*, dacă neglijăm frecările. Pe parcursul acestei mișcări, energia cinetică scade și se transformă în energie potențială, astfel că, atunci când corpul ajunge în punctul *B*, are aceeași energie potențială ca și în punctul *A*. Din B corpul revine spre *O* și apoi spre *A*.

Prin urmare, în timpul mișcării corpului are loc în permanență o transformare a unei forme de energie în cealaltă formă, dar suma energiilor va fi aceeași.

3) Fie un corp aruncat vertical în sus. Mișcarea corpului se face sub acțiunea forței de greutate, care este o forță de tip conservativ. 6 Neglijând forțele de frecare putem aplica legea de conservare a energiei pentru sistemul corp-Pământ.



Când corpul urcă din poziția 1 în poziția 2, forța de greutate efectuează un lucru mecanic, astfel că energia potențială a corpului va scădea:

$$L_{12} = -mg \cdot \Delta h_{12} = -mg(h_2 - h_1)$$

$$\Delta E_{c_{12}} = L_{12} \Rightarrow \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = L_{12}$$

Obținem:

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2$$

$$E_{m1} = E_{m2}, \text{ adică } E_m = const.$$

Dacă alegem punctul 1 pe sol în O, atunci ținând cont că $h_1 = 0$ și $v_1 = v_0$ obținem:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + mgh_2,$$

adică relația lui Galilei:

$$v_2^2 = v_0^2 - 2gh_2.$$

Considerând punctul A la înălțimea maximă la care poate ajunge corpul, adică $h_2 = h_{max} = h_A$ și $v_2 = 0$, din relația de conservare a energiei se obține:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh_{max}; \quad h_{max} = \frac{v_0^2}{2g}.$$

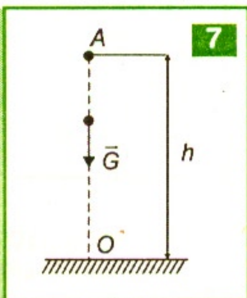
Deci în procesul de urcare a corpului în câmp gravitațional de la sol la înălțimea maximă, energia cinetică inițială a corpului se transformă în energie potențială, suma lor menținându-se constantă. La înălțimea maximă, corpul are numai energie potențială. În schimb, la coborâre energia potențială scade și crește energia cinetică, transformarea energiilor făcându-se în sens invers. Când revine la sol corpul are numai energie cinetică și conform legii de conservare a energiei mecanice, are aceeași energie cinetică cu care a fost lansat, deci corpul se întoarce la sol cu aceeași viteză cu care a fost lansat.

În practică, dacă arunci o minge în sus, ea nu revine cu aceeași viteză cu care ai aruncat-o, deoarece există forța de frecare cu aerul care micșorează energia sistemului.

Probleme rezolvate

1. Un bloc de beton se desprinde de la un balcon aflat la înălțimea $h = 25$ m. Cu ce viteză ajunge la sol ($g = 10$ m/s²)?

Rezolvare

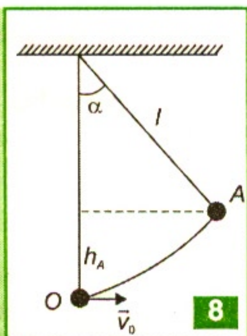


Asupra blocului acționează greutatea, care este o forță de tip conservativ. Vom aplica pentru sistemul corp-Pământ legea conservării energiei mecanice. Alegem nivelul de energie potențială zero pe sol. **7** În A, corpul posedă numai energie potențială.

$$E_{p_A} = E_{c_0} \Rightarrow mgh = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh} = 22{,}36\,\text{m/s}.$$

2. Un corp este suspendat cu ajutorul unui fir inextensibil de lungime $l = 0{,}5$ m. Se imprimă corpului o viteză $v_0 = \sqrt{5}$ m/s. **8** Să se calculeze cu ce unghi maxim deviază firul. $g = 10$ m/s²

Rezolvare



Pentru sistemul corp-Pământ aplicăm legea conservării energiei mecanice:

$$E_{c_0} + E_{p_0} = E_{c_A} + E_{p_A}.$$

Considerăm $E_{p_0} = 0$ (nivelul de referință pentru energia potențială) în punctul cel mai de jos al traiectoriei, *O*.

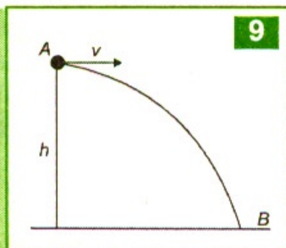
$E_{cA} = 0$, deoarece corpul se oprește în A.

$$E_{c_0} = E_{p_A} \Rightarrow \frac{mv_0^2}{2} = mgh_A.$$

Obținem

$$h_A = l - l\cos\alpha = l(1 - \cos\alpha).$$

$$\Rightarrow \frac{v_0^2}{2} = gl(1 - \cos\alpha) \Rightarrow \cos\alpha = 1 - \frac{v_0^2}{2gl} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60°.$$



3. Un lunetist lansează orizontal un glonț cu masa $m = 20$ g cu viteza $v_0 = 100$ m/s dintr-un turn cu înălțimea $h = 25$ m, **9**. Să se afle:

a) viteza cu care ajunge glonțul pe sol;

b) cu cât s-a decomprimat un resort cu constanta elastică $k = 5000$ N/m pentru a imprima glontelui viteza v_0.

Rezolvare

Deoarece glonțul se mișcă în câmp gravitațional, putem aplica alegea de conservare a energiei mecanice pentru sistemul glonț-Pământ, fiindcă greutatea este o forță conservativă.

$$E_{C_A} + E_{P_A} = E_{C_B} + E_{P_B}.$$

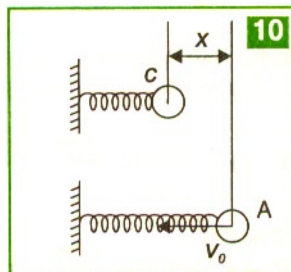
Alegem nivelul de energie potențială nulă pe sol.

$$E_{P_B} = 0,$$

$$\text{obținem } \frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv_B^2}{2}$$

$$v_B = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 102{,}47 \text{ m/s}.$$

*b) Pentru sistemul corp-resort putem aplica legea conservării energiei mecanice, deoarece forțele elastice sunt conservative. **10**



$$E_{c_C} + E_{p_C} = E_{c_A} + E_{p_A}$$

Dacă $E_{C_C} = 0$

și alegem nivelul de energie potențială zero, poziția în care resortul este inițial nedeformat, punctul A,

$$E_{P_A} = 0,$$

obținem

$$E_{P_C} = E_{C_A} \Rightarrow \frac{kx^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} \Rightarrow x = v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\Rightarrow x = 0{,}2 \text{ m} = 20 \text{ cm}.$$

4. Corpurile cu masele $m_1 = 3$ kg, $m_2 = 1$ kg sunt atârnate de capetele unui fir subțire și inextensibil, de masă neglijabilă, trecut peste un scripete cu masa neglijabilă și raza $R = 3$ cm. Corpurile sunt aduse la același nivel și apoi sunt lăsate să se miște. Neglijăm frecările și energia cinetică de rotație a scripetelui. Ce viteză au corpurile când deplasarea lor este $h = 1{,}25$ m?

Rezolvare

Inițial $E_{totală,0} = 0$; ulterior

$$E_{total} = -m_1gh + m_2gh + \frac{m_1v^2}{2} + \frac{m_2v^2}{2},$$

Înlocuim și obținem valoarea $v = 3{,}54$ m/s.

Copiază în caiet următoarele afirmații și răspunde cu A dacă afirmația respectivă este adevărată sau cu F dacă este falsă:

1. A F. Dacă un sistem este izolat și forțele care intervin în cazul sistemului sunt conservative, se aplică conservarea energiei mecanice.

2. A F. În cazul sistemului izolat în care intervin forțe gravitaționale are loc o transformare a energiei cinetice în energie potențială și invers.

3. A F. Dacă în cazul unui sistem intervin forțe de frecare, energia sistemului se conservă.

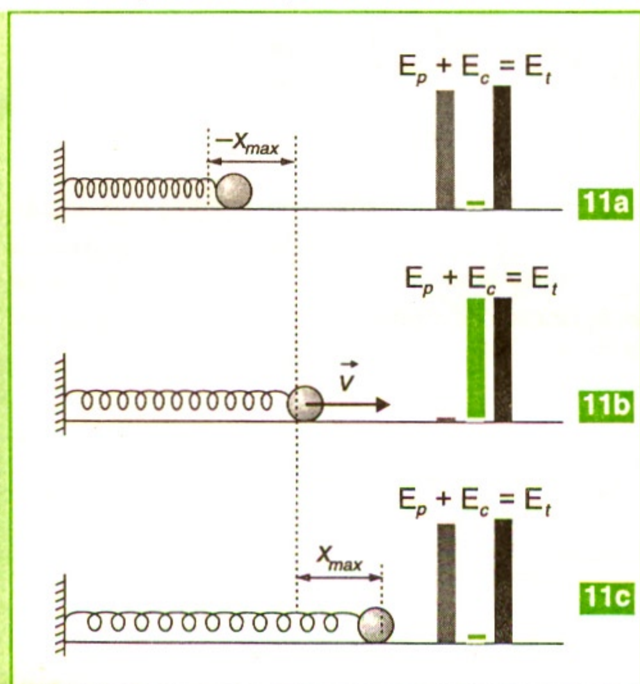
4. A F. Un corp aruncat vertical în sus revine la sol cu aceeași viteză, dacă se neglijează efectul forțelor de frecare.

*5. A F. În figurile 11a și 11c, sistemul are energie cinetică mică și energie potențială elastică mare.

*6. A F. În figura 11b, sistemul are energie cinetică mare și energie potențială elastică mică.

*7. A F. Pe parcursul mișcărilor descrise de aceste desene are loc o transformare a energiei potențiale elastice în energie cinetică.

*8. A F. Dacă un resort jucărie se destinde, el transmite întreaga lui energie bilei pe care o lansează.



Probleme

1. Alegeți informația corectă:
a) energia potențială este unic definită;
b) variația energiei cinetice este o mărime fizică de proces;
c) pentru un sistem izolat, energia totală se conservă;
d) forțele de tip conservativ au proprietatea că lucrul lor mecanic nu depinde de forma drumului parcurs și nici de legea de mișcare, ci doar de poziția inițială și cea finală.

2. Un corp cu masa $m = 1$ kg cade liber de la o înălțime $h = 20$ m. Valoarea energiei cinetice a corpului când acesta se află la înălțimea $h_1 = 5$ m este:
a) 50 J; b) 100 J; c) 150 J; d) 200 J.

3. Un corp cade liber de la altitudinea H deasupra solului. Altitudinea y la care energia sa cinetică este de patru ori mai mare decât energia potențială a corpului în punctul respectiv este:
a) H/2; b) H/3; c) H/4; d) H/5.

4. Un corp cu masa $m = 100$ g este aruncat pe verticală, de jos în sus cu viteza inițială $v_0 = 30$ m/s. La o treime din înălțimea maximă la care se ridică corpul valoarea energiei cinetice a corpului este:
a) 10 J; b) 20 J; c) 30 J; d) 40 J.

5. Un elicopter zboară deasupra solului la înălțimea $h = 80$ m cu viteza $v = 15$ m/s. Din elicopter se lasă să cadă un pachet cu masa $m = 1$ kg. Viteza cu care lovește solul este:
a) 40 m/s; b) 42,7 m/s; c) 32 m/s; d) 37,5 m/s.

6. Un corp aruncat în sus ajunge la înălțimea h. Cu cât se va ridica mai mult corpul, dacă viteza sa inițială va crește de 3 ori?
a) cu 9 h; b) cu 4 h; c) cu 8 h; d) cu 12 h.

7. Un corp cade liber de la altitudinea H deasupra solului. Altitudinea y la care viteza este jumătate din cea cu care ajunge la sol este:
a) 3H/4; b) H/2; c); H/3; d) H/4.

8. Un corp punctiform este suspendat de un fir inextensibil cu lungimea l. Firul este menținut deviat față de verticală cu unghiul $\alpha = 60°$. Pe verticala de susținere se așază o piedică. Înălțimea măsurată față de punctul de susținere la care trebuie pusă piedica, pentru ca atunci când se eliberează corpul, firul să poată ajunge orizontal este:
a) $l/4$; b) $l/3$; c) $l/2$; d) $3l/4$.

*9. Un resort ideal are constanta elastică $k = 1000$ N/m și se află pe o suprafață orizontală, fiind fixat la unul din capete. Resortul este ciocnit de o bilă cu masa $m = 100$ g, care se mișcă fără frecare. Bila are în momentul ciocnirii viteza $v = 10$ m/s. Care este deformația maximă a resortului ?
a) 5 cm; b) 10 cm; c) 15 cm; d) 20 cm.

*10. Un resort de constantă elastică k este așezat orizontal și este lovit de un corp de masă m cu viteza v, comprimându-se cu x_0. Același resort așezat vertical pe sol este lovit de sus în jos de același corp, cu aceeași viteză și se comprimă cu x_v. Cunoscând că $m\,g/k = 4/3\,x_0$, să se precizeze de câte ori este mai mare x_v decât x_0.
a) $x_v = x_0$; b); $x_v = 2x_0$; c); $x_v = 3x_0$; d) $x_v = 4x_0$.

11. Un corp cu masa $m_1 = 1$ kg este legat de un fir inextensibil cu lungimea $l = 40$ cm și deviat față de verticală cu un unghi $\alpha = 60°$, după care se lasă liber. Să se afle:
a) cu ce viteză trece primul corp prin poziția verticală;
b) ce energie cinetică are în această poziție.

12. Pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 30°$ se lansează de la baza planului un corp cu viteza inițială $v_0 = 13$ m/s. Corpul se mișcă cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu = \dfrac{1}{5\sqrt{3}}$, iar lungimea planului înclinat $l = 12$ m. De pe planul înclinat corpul sare și ajunge pe sol (orizontala de plecare). Se neglijează frecarea cu aerul, iar $g = 10$ m/s^2. Să se afle:
a) viteza în vârful planului înclinat;
b) înălțimea maximă la care corpul urcă, măsurată de la sol;
c) viteza cu care revine la sol și cosinusul unghiului sub care corpul lovește solul.

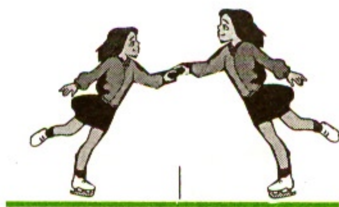
13. De un fir cu lungimea $l = 20$ cm este prins un corp cu masa $m = 1$ kg. Punctul de suspensie al firului se află la înălțimea $h = 5$ m față de sol. Pendulul este deviat cu $\alpha = 90°$ de la poziția de echilibru și fiind lăsat liber, descrie un arc de cerc. În momentul când trece prin poziția de echilibru firul se rupe, iar corpul lovește solul. Să se calculeze, în condițiile în care se neglijează frecarea cu aerul, iar $g = 10$ m/s^2:
a) viteza corpului în poziția verticală și tensiunea în fir;
b) viteza cu care corpul lovește solul și cosinusul unghiului sub care corpul lovește solul.

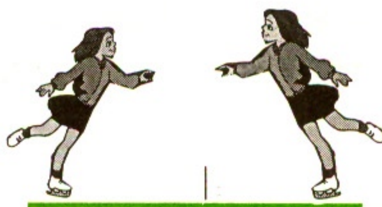
14. O minge este aruncată sub un unghi $\alpha = 60°$ cu energia cinetică $E_c = 120$ J. Neglijând frecarea cu aerul, iar $g = 10$ m/s^2, să se calculeze:
a) energia potențială în punctul maxim al traiectoriei;
b) energia cinetică în punctul maxim al traiectoriei;
c) energia cinetică în punctul ascendent al traiectoriei în care vectorul viteză formează unghiul $\beta = 30°$ cu orizontala.

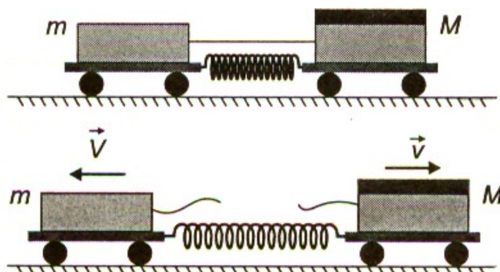
Încearcă să pui în mișcare, cu aceeași viteză, un cărucior gol și unul încărcat sau o minge de tenis și una de volei. Ca să obții aceeași creștere a vitezei, Δv, a unuia dintre corpuri, trebuie să acționezi asupra lui cu o forță mare F_1 într-un interval mic de timp Δt_1 sau cu o forță mai mică F_2 într-un interval de timp Δt_2 mai mare, iar produsul $F\Delta t$ trebuie să fie mai mare când masa corpului este mai mare.
Ai observat că doi patinatori cu mase diferite, aflați în repaus, încep să se miște cu viteze diferite în sensuri opuse când unul dintre ei îl împinge pe celălalt. Atunci când te deplasezi dintr-un capăt al unei bărci spre celălalt capăt, barca se deplasează în același sens cu tine sau în sens invers?

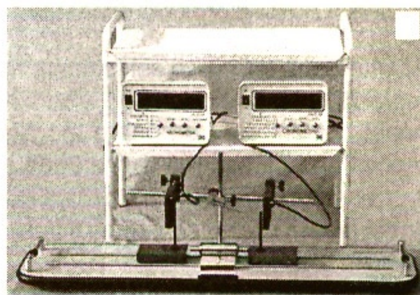
Să analizăm următoarele experimente: două cărucioare, cu mase diferite, sunt în repaus pe o placă. Cărucioarele încep să se miște simultan, cu viteze diferite dar în sensuri opuse, când ardem firul care ținea un resort comprimat între acestea.
Dacă avem dispozitiv cu declanșator al senzorilor fotosensibili pentru pornirea dispozitivelor electronice , atunci putem cronometra și măsura viteza instantanee a cărucioarelor. Masa cărucioarelor poate fi modificată adăugând pe ele săculețe cu nisip, de mase cunoscute.

unui corp reprezintă produsul dintre masa și vectorul viteză al corpului față de un sistem de referință: $\vec{p} = m\vec{v}$.









Impulsul unui punct material se poate schimba dacă se schimbă sistemul de referință.
De exemplu: un copil care ține în mână un măr, într-un tramvai care se mișcă. Pentru copil mărul nu are impuls, în timp ce pentru orice om de pe trotuar mărul are un impuls egal cu produsul dintre masa mărului și viteza tramvaiului.
Impulsul corpului de masă m este o mărime fizică vectorială. Deoarece înmulțirea unui vector cu un scalar este o adunare repetată, rezultă că vectorul impuls este coliniar cu vectorul viteză (are sensul și direcția acesteia, deci este tangent la traiectoria corpului considerat) și este de m ori mai mare decât vectorul viteză $\vec{v}$.
Unitatea de măsură în sistemul internațional: $[p]_{SI} = [m]_{SI}[v]_{SI} = 1$ kg·m/s.

Conform definiției dinamice a forței:

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \Rightarrow \vec{F}\cdot\Delta t = \Delta\vec{p}\cdot$$

$\vec{F}\cdot\Delta t$ se numește **impulsul forței.**
Cauza modificării impulsului corpului este impulsul forței.
Impulsul forței măsoară efortul necesar pentru a schimba starea de mișcare a corpului asupra căruia acționează.
Unitatea de măsură în sistemul internațional: $[F\Delta t]_{SI} = [F]_{SI}[\Delta t]_{SI} = 1$ N·s.

Impulsul forței pentru o forță care acționează asupra unui corp într-un interval de timp Δt produce o variație a impulsului acelui corp. O variație a impulsului se obține cu o forță mică pe o durată mare sau cu o forță mare pe o durată mică.
De exemplu, o deformație plastică mai mare provocată de ciocnirile autovehiculelor înseamnă forță mai mică și durată mai mare la încetinirea lor.

Teorema variației impulsului

Dacă asupra punctului material acționează mai multe forțe, atunci acestea se compun și se obține o forță rezultantă.
Pentru o forță rezultantă $\vec{F}$ ce acționează asupra unui corp într-un interval de timp Δt se obține o variație a impulsului $\Delta\vec{p}$ al acelui corp.

$$\Delta\vec{p}$$

$$\vec{F}\Delta t$$

Altfel spus:

$$\left(\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}\right)$$

Aceste două formulări echivalente reprezintă *teorema variației impulsului unui punct material* (corp).
Impulsul unui corp se poate modifica numai sub acțiunea unei forțe. În urma unui proces de interacțiune dintre două corpuri, realizat prin intermediul forțelor, se face un transfer de mișcare mecanică de la un corp la celălalt.
Astfel putem spune că impulsul punctului material este o măsură a mișcării mecanice pe care o are.

Aplicarea teoremei variației impulsului în diferite situații

1. *Asupra corpului* considerat *poate acționa o forță rezultantă variabilă pe direcția de mișcare*. Ai dat o mână de ajutor ca să împingi un vehicul rămas în mijlocul drumului? Dacă forța rezultantă a avut valoarea $\vec{F}_1$ în intervalul de timp Δt_1 și apoi valoarea $\vec{F}_2$ în intervalul de timp Δt_2 și ambele forțe au acționat pe direcția de mișcare a corpului de masă m care avea viteza inițială v_0, atunci se produc variațiile de impuls (pe direcția de mișcare) **4**:

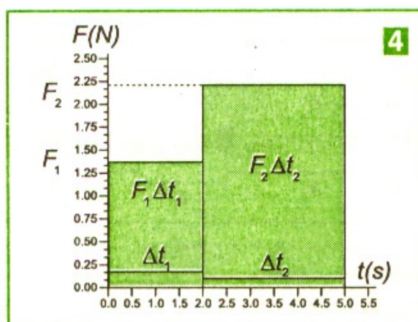
$$\vec{F}_1\Delta t_1 = m(\vec{v}_1 - \vec{v}_0)$$

și, respectiv, $\vec{F}_2\Delta t_2 = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$.

Prin însumarea lor algebrică obținem:

$$\vec{F}_1\Delta t_1 + \vec{F}_2\Delta t_2 = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_0).$$

$\vec{F}_1\Delta t_1 + \vec{F}_2\Delta t_2$ este impulsul total echivalent al forțelor care au schimbat starea de mișcare a corpului. Variația impulsului corpului nu depinde de modul în care s-a obținut impulsul total al forțelor care au schimbat starea de mișcare.



2. Considerăm ***un sistem de două corpuri aflate în interacțiune.***

Notăm cu $\vec{F}_{21}$, respectiv, $\vec{F}_{12}$, forțele cu care cele două corpuri acționează reciproc; pentru sistemul format din cele două corpuri, aceste forțe sunt forțe de natură internă. Conform principiului acțiunilor reciproce dintre cele două corpuri:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \text{ sau } \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0.$$

Forțele au puncte de aplicație diferite, dar rezultanta acestor forțe interne ale sistemului este nulă. Notăm cu $\vec{F}_1$ și respectiv cu $\vec{F}_2$ rezultantele forțelor externe care acționează asupra acestor corpuri și scriem variația impulsului pentru fiecare corp:

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_{12})\Delta t = \Delta\vec{p}_1$$

$$(\vec{F}_2 + \vec{F}_{21})\Delta t = \Delta\vec{p}_2.$$

Adunăm cele două relații și obținem:

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21})\Delta t = \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2.$$

Forțele interne ale sistemului nu produc variația impulsului deoarece:

$$(\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21})\Delta t = 0.$$

Operatorul diferență (Δ) fiind distributiv față de operația de adunare obținem:

$$(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)\Delta t = \Delta(\vec{p}_1 + \vec{p}_2),$$

sau $\vec{F}_{ext} \cdot \Delta t = \Delta\vec{p}$ unde $\vec{F}_{ext} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ reprezintă rezultanta forțelor externe care acționează asupra sistemului de corpuri, iar $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$ reprezintă impulsul total al sistemului. Aceeași relație se obține și în cazul sistemului format din mai multe corpuri.

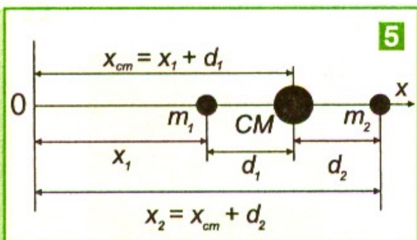
Teorema variației impulsului pentru un sistem de două (sau mai multe) corpuri punctiforme:

$\vec{F}_{ext}\Delta t$

$\Delta\vec{p}$

3. Considerăm un sistem format din două corpuri punctiforme de mase m_1 și m_2, situate la distanța d.

Din figura 5 obținem relațiile: $d_1 = x_{CM} - x_1$; $d_2 = x_2 - x_{2CM}$.



Centrul de masă (*CM*) al sistemului este situat la distanțele d_1 și, respectiv, d_2 față de cele două corpuri punctiforme, mai aproape de cel cu masa mai mare, deci $d = d_1 + d_2$ și $m_1 \cdot d_1 = m_2 \cdot d_2$. Sistemul se reduce la un punct material situat în *CM*. Acesta se deplasează ca un punct material de masă totală $m = m_1 + m_2$. Produsul dintre masa totală $m = m_1 + m_2$ și abscisa centrului de masă x_{CM} a sistemului la originea *O* a sistemului de referință (analog pentru celelalte axe) este egal cu suma algebrică a produselor dintre masa fiecărui corp (m_1 și, respectiv, m_2) și abscisa fiecărui corp (x_1 și, respectiv, x_2) până la originea *O* a unui sistem de referință:

$$(m_1 + m_2) \cdot x_{CM} = m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2.$$

$$\Rightarrow x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}.$$

Impulsul total al sistemului este egal cu masa sistemului înmulțită cu viteza centrului de masă v_{CM}, ca și cum întreaga masă a sistemului ar fi concentrată în CM și s-ar mișca cu viteza acestuia, adică sistemul s-ar reduce la un punct material situat în CM:

$$\vec{p}_{CM} = (m_1 + m_2)\vec{v}_{CM} \quad \text{și} \quad \vec{p}_{CM} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2.$$

Pe oricare axă, impulsul centrului de masă este egal cu suma algebrică a componentelor impulsurilor corpurilor. Dacă cele două corpuri se mișcă pe aceeași direcție, se alege axa de coordonate *Ox* pe acea direcție:

$$p_{x_{CM}} = p_{1x} + p_{2x}$$

Dacă

$$p_{x_{CM}} = 0 \Rightarrow p_{1x} = -p_{2x}$$

adică părțile sistemului se mișcă în sens opus și, deoarece $m_1 v_{1x} = m_2 v_{2x}$, înseamnă că va avea o viteză mai mare corpul cu masa mai mică.

Rezultanta forțelor exterioare aplicate sistemului este egală cu masa sistemului înmulțită cu accelerația centrului de masă $\vec{F} = m\vec{a}_{CM}$, ca și cum toată masa sistemului ar fi concentrată în *CM* și toate forțele s-ar aplica în *CM*.

Probleme rezolvate

1. Pe o șosea rectilinie rulează cu viteza $v = 72$ km/h o mașină cu masa = 1000 kg. Conducătorul auto sesizează un obstacol și frânează în intervalul de timp $\Delta t = 10$ s. Care este valoarea forței de frânare ?

Rezolvare

Aplicăm teorema de variație a impulsului:

$$F \cdot \Delta t = \Delta p = 0 - mv \Rightarrow F = -\frac{mv}{\Delta t} = -2 \text{ kN}.$$

Semnul minus al forței F ne arată că aceasta este o forță rezistivă (de frânare).

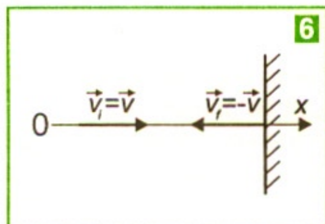
2. O minge cu masa $m = 200$ g lovește un perete cu viteza $v = 2$ m/s. Mingea se întoarce pe aceeași direcție, în urma contactului cu peretele, cu o viteză egală în mărime. Dacă durata de contact dintre perete și minge este $\Delta t = 1$ ms, să se calculeze cu ce forță medie acționează peretele asupra mingii.

Rezolvare

Aplicăm teorema de variație a impulsului pentru minge:

$\vec{F} \cdot \Delta t = \Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$.

Alegem axa Ox îndreptată spre perete, pe direcția de mișcare a mingii **6**. Proiectăm relația vectorială pe această axă, ținând cont că $v_i = v_f = v$.



$F \cdot \Delta t = -mv - mv = -2mv$, obținem

$$F = -\frac{2mv}{\Delta t} = -800 \text{ N}.$$

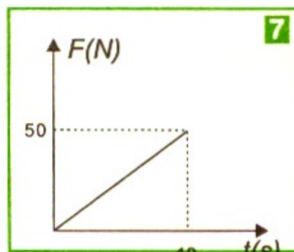
Semnul minus ne arată că peretele exercită asupra mingii o forță care are sensul contrar axei Ox.

3. Un punct material cu masa $m = 2{,}5$ kg este supus acțiunii unei forțe totale care variază în timp, conform graficului **7**. Corpul pornește din repaus. Să se afle viteza corpului după $t = 10$ s de la începerea mișcării.

Rezolvare

Aplicăm teorema de variație a impulsului pentru un punct material. Acesta se va mișca rectiliniu sub acțiunea unei singure forțe rezultante, astfel că $F\Delta t = \Delta p$.

Deoarece forța nu este constantă, impulsul forței rezultante îl vom calcula cu metoda grafică, egal cu aria cuprinsă între curba forței și axa timpului în primele 10 s de la începerea mișcării:

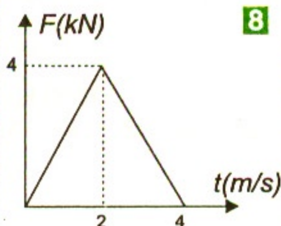


$$F \cdot \Delta t = 25 \text{ Ns}.$$

$\Delta p = p_f - p_i = mv$, deoarece inițial corpul nu avea impuls, fiind în repaus.

Obținem:

$$v = \frac{F\Delta t}{m} = 10 \text{ m/s}.$$



4. Un corp cu masa $m = 1$ kg și viteza $v = 6$ m/s lovește un alt corp, cu masa $M = 2$ kg, aflat în repaus. Forța de interacțiune dintre corpuri depinde de timp conform graficului. 8 Știind că după lovire corpurile se mișcă pe aceeași direcție, să se afle:

a) vitezele corpurilor după ce acestea se lovesc;

b) ce energie cinetică se pierde.

Rezolvare

Aplicăm, pentru fiecare corp, teorema de variație a impulsului.

Pentru corpul cu masa *M*:

$$F_{medie} \cdot \Delta t = \Delta p_2;$$
$$F_{medie} \cdot \Delta t = 8 \text{ Ns};$$
$$\Delta p_2 = p_{2f} - p_{2i} = Mv_2;$$

obținem

$$F \cdot \Delta t = Mv_2.$$
$$v_2 = \frac{F\Delta t}{M} = 4 \text{ m/s}.$$

Semnul pozitiv al vitezei ne arată că al doilea corp se mișcă în sensul în care a fost lovit de primul corp.

Deoarece forțele de interacțiune care apar în momentul lovirii corpurilor sunt forțe de natură internă pentru sistem și nu pot modifica impulsul total al sistemului, dacă impulsul corpului *M* crește cu $F\Delta t$, înseamnă că impulsul corpului *m* scade cu $F\Delta t$. Deci pentru corpul cu masa *m*:

$$\Delta p_1 = -F\Delta t \Rightarrow p_{1f} - p_{1i} = -F\Delta t = -8 \text{ Ns};$$
$$mv_1 - mv = -F\Delta t$$

Obținem

$$v_1 = v - \frac{F\Delta t}{m} = -2 \text{ m/s};$$

Semnul negativ al vitezei ne arată că primul corp după ce lovește corpul de masă *M* (aflat inițial în repaus) se întoarce.

b) Calculăm variația energiei cinetice a sistemului:

$$\Delta E_{c_{sistem}} = E_{c_{sistem\,f}} - E_{c_{sistem\,i}};$$
$$E_{c_{sistem\,f}} = E_{c_{1f}} + E_{c_{2f}} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2} = 18 \text{ J}$$
$$E_{c_{sistem\,i}} = E_{c_{1i}} + E_{c_{2i}} = \frac{mv^2}{2} = 18 \text{ J}$$
$$\Delta E_{c_{sistem}} = 0.$$

În urma acestui proces energia cinetică a sistemului se conservă.

TESTE

Copiază în caiet următoarele afirmații și răspunde cu A dacă afirmația respectivă este adevărată sau cu F dacă este falsă.

1. A F. Impulsul unui corp este o mărime fizică vectorială.

2. A F. O forță aplicată unui corp îi modifică acestuia impulsul.

3. A F. Impulsul este o măsură a mișcării mecanice.

4. A F. Pentru a modifica mai mult viteza unei mașini, aceeași forță trebuie să acționeze un timp mai lung.

5. A F. Impulsul unui corp variază direct proporțional cu forța aplicată acestuia.

Probleme

1. Care este enunțul teoremei de variație a impulsului unui punct material ?
a) impulsul unui punct material izolat se conservă;
b) punctul material izolat se mișcă rectiliniu și uniform sau este în repaus relativ;
c) dacă rezultanta forțelor externe este permanent zero, impulsul total rămâne constant în timp;
d) variația impulsului punctului material este egală cu impulsul forței aplicate punctului material.

2. O particulă în mișcare are impulsul p și energia cinetică E_C. Dacă impulsul particulei se dublează, atunci energia cinetică devine:
a) $2E_C$; b) $E_C/2$; c) $4E_C$; d) $E_C/4$.

3. Impulsul unui corp este p = 20 Ns, iar energia cinetică este E_c = 40 J. Masa corpului este:
a) 1 kg; b) 2 kg; c) 4 kg; d) 5 kg.

4. Timpul în care trebuie să acționeze o forță F = 200 N pentru a produce o variație de impuls de 200 kg m/s este:
a) 0,5 s; b) 1 s; c) 2 s; d) 4 s.

5. Legea de mișcare a unui corp cu masa m = 1 kg este $x = 4 - 8t + 6t^2$. Variația impulsului după Δt = 2 s de la începerea mișcării este:
a) 16 kg m/s; b) 24 kg m/s; c) 8 kg m/s; d) 0 kg m/s.

6. Un atlet cu masa m = 60 kg aleargă pe o pistă circulară cu viteza v = 8 m/s. Variația impulsului său între două puncte diametral opuse ale pistei este:
a) 120 kg m/s; b) 240 kg m/s; c) 480 kg m/s; d) 960 kg m/s.

7. O minge cu masa $m = 0,5$ kg lovește normal și perfect elastic un perete cu viteza $v = 50$ m/s. Ciocnirea durează un interval de timp $\Delta t = 0,01$ s. Forța cu care lovește mingea peretele este:
a) 100 N; b) 500 N; c) 5 kN; d) 1 kN.

8. Un glonte cu masa $m = 50$ g iese orizontal dintr-o armă cu viteza inițială $v_0 = 500$ m/s și străpunge un obstacol, din care iese cu viteza $v = 100$ m/s după un interval de timp de 10 ms. Forța medie de rezistență întâmpinată de glonte este:
a) 2 kN; b) 4 kN; c) 5 kN; d) 10 kN.

9. O minge de masă m lovește perfect elastic un perete cu viteza v. Care este mărimea variației impulsului prin lovire?
a) $\Delta p = mv$; b) $\Delta p = 2mv$; c) $\Delta p = 4mv$; d) $\Delta p = 0$.

10. O forță $F = 2$ N acționează asupra unui corp cu masa $m = 2$ kg și care are viteza inițială $v_0 = 20$ m/s. Valoarea finală a vitezei după trecerea timpului $t = 5$ s este:
a) 25 m/s; b) 15 m/s; c) 10 m/s; d) 5 m/s.

Condițiile în care impulsul total se conservă

Din expresiile matematice $\vec{p}-\vec{p}_0=\vec{F}\cdot(t-t_0)$ sau $\Delta\vec{p}=\vec{F}\Delta t$ ale teoremei variației impulsului mecanic pentru un punct material rezultă că: variația impulsului unui punct material este zero $(\Delta\vec{p}=0)$ dacă impulsul forței rezultante care acționează asupra corpului este zero $(\vec{F}\cdot\Delta t=0)$, deci forța rezultantă care acționează asupra corpului este zero și punctul material este izolat. În acest caz impulsul său rămâne constant:

$$\vec{p}-\vec{p}_0=0 \quad sau \quad \vec{p}=\vec{p}_0=constant.$$

Legea conservării impulsului pentru un corp descris ca punct material:

$$\vec{p}=constant.$$

Conform teoremei de variație a impulsului pentru un punct material izolat (nu interacționează cu alte corpuri), $\vec{F}_{ext}=0$, impulsul forței rezultante $\vec{F}_{ext}\Delta t=0$, și cum $\vec{F}_{ext}\Delta t=\Delta\vec{p}$, înseamnă că $\Delta\vec{p}=0$, adică impulsul total $\vec{p}$ rămâne constant.

Legea conservării impulsului pentru un sistem de două corpuri descrise ca puncte materiale:

$$(\vec{F}_{ext}=0)$$

$$\vec{p}=const. \quad sau \quad \Delta\vec{p}=0.$$

Perechile de forțe acțiune-reacțiune reprezintă forțe interne și se anulează reciproc, deci impulsul total al sistemului de corpuri nu poate fi modificat de către forțele interne dintre corpuri, adică rămâne constant în mărime, direcție și sens în cazul sistemelor izolate (ca în cazul ciocnirii corpurilor, proces care durează foarte puțin). 1
Forțele interne deși nu pot modifica impulsul total al sistemului, îl redistribuie între punctele materiale componente ale sistemului.
Numai forțele de natură externă pot modifica impulsul total al sistemului.
Pentru un sistem izolat de corpuri, forțele din mediul exterior acestora au forța rezultantă nulă ($\vec{F}_{ext}=0$), deci accelerația centrului de masă este nulă $(\vec{a}_{CM}=0)$ iar viteza $\vec{v}_{CM}$ a centrului de masă este constantă ca și impusul centrului de masă:

$$\vec{p}_{CM}=(m_1+m_2)\vec{v}_{CM}=const.$$


1

Știți că doi patinatori aflați în repaus încep să se miște cu viteze diferite în sensuri opuse când unul dintre ei îl împinge pe celălalt.

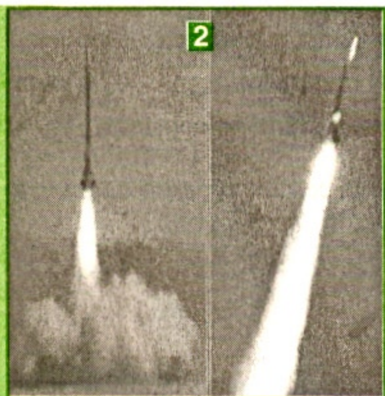
Observație: pentru un sistem izolat energia mecanică se conservă numai dacă forțele interne sunt conservative, dar impulsul se conservă indiferent de natura forțelor interne (conservative sau neconservative). Impulsurile forțelor interne sunt egale în mărime și de sens opus, deci variația vectorului impuls al unui corp este egal în mărime și de sens opus variației vectorului impuls al corpului cu care interacționează în intervalul de timp considerat:

$$\vec{p}'_1 - \vec{p}_1 = -(\vec{p}'_2 - \vec{p}_2).$$

Asupra corpului pot acționa simultan două sau mai multe forțe, dar rezultanta lor poate să fie nulă, deci viteza și impulsul nu se schimbă în acel interval de timp.

Aplicații ale legii conservării impulsului

1. O rachetă primește un impuls în urma arderii combustibilului, iar gazele primesc impuls de sens opus. 2



2. Poți să te miști înapoi împingând cu o forță în alt corp o anumită durată. Dacă acesta are masa foarte mare, doar tu te miști. Lucrul mecanic al forței de reacțiune a unui perete fix și rigid care acționează asupra ta este zero, deoarece punctul ei de aplicație nu se mișcă din zona de contact. În brațul tău, care se întinde ca un resort, se dezvoltă o forță musculară internă variabilă al cărei punct de aplicație se deplasează în direcția deplasării tale față de perete. Lucrul mecanic efectuat de această forță produce creșterea energiei cinetice. Înseamnă că, pe durata interacțiunii, corpurile schimbă și energie și impuls.

3. Când se taie firul care ține un resort comprimat, între două corpuri alipite, acesta se destinde și exercită asupra corpurilor forțe egale și de sens contrar. Corpurile cu mase diferite ținute la mică distanță de resortul comprimat se mișcă rectiliniu cu viteze diferite. Vitezele sunt pe aceeași direcție, dar în sensuri opuse, fiind invers proporționale cu masele corpurilor. Sursa energiilor cinetice este energia potențială elastică:

$$\frac{K \cdot y^2}{2} = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2}.$$

Folosind doar conservarea energiei, nu putem ști ce viteză va avea fiecare corp și trebuie să utilizăm și legea de conservare a impulsului pentru un sistem izolat:

$$\vec{p}_i = 0 \Rightarrow \vec{p}_f = 0 \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = 0 \Rightarrow m_1\vec{v}_1 = -m_2\vec{v}_2,$$

adică vectorii viteză sunt opuși.

4. Când un soldat trage cu o armă din poziția culcat, el își așază arma la umăr. Arma și glontele formează un sistem izolat și pentru acest sistem impulsul total se conservă. Inițial arma și glontele erau în repaus, $\vec{p}_i = 0$, ceea ce va însemna că și $\vec{p}_f = 0$. Soldatul va simți în umăr o împingere puternică din partea armei care are tendința să se ducă în spate. Acesta este reculul armei.

Exemplu numeric:

Arma are masa $m = 1$ kg și soldatul $M = 80$ kg. Glontele iese din țeavă cu $v_1 = 1000$ m/s. Ce forță trebuie să dezvolte umărul soldatului în intervalul de timp $\Delta t = 1\,\text{ms}$.

Aflăm pe baza legii conservării impulsului viteza armei $v_2 = \frac{mv_1}{M} = 12{,}5$ m/s.

Aplicând apoi teorema de variație a impulsului pentru soldat:

$$F\Delta t = \Delta p = p_f - p_i = -Mv_2\ .$$

Obținem

$$|F| = \frac{Mv_2}{\Delta t} = 1 \cdot 10^6\,\text{N} = 1\,\text{MN},$$

care este foarte mare și, dacă soldatul nu fixează arma bine în umăr, reculul îi poate disloca umărul.

$\frac{|F|}{G} = \frac{|F|}{Mg} = 1250$, adică $|F|$ este mult mai mare decât greutatea soldatului.

5. Dacă un sistem este izolat, impulsul lui se conservă și, deoarece pentru orice sistem am definit un centru de masă ca fiind punctul în care este concentrată masa sistemului, pe baza proprietății că $\vec{p}_{sistem} = m\vec{v}_{CM}$, înseamnă că $\vec{v}_{CM} = \text{const}$.

Dacă inițial centrul de masă era în repaus, în cazul sistemului izolat va rămâne în repaus.

De exemplu, dacă într-o barcă, la capetele acesteia, stau doi pescari și tot sistemul este în repaus, în urma schimbării locurilor pescarilor în barcă, barca se va deplasa, sensul de mișcare deprinzând de masele pescarilor, dar centrul de masă al sistemului va rămâne în repaus.

6. Când două corpuri (două bile sau două monezi) se ciocnesc, între ele are loc un transfer de energie cinetică și de impuls pe durata cât sunt în contact. Prin ciocnire se înțelege o interacțiune de scurtă durată (de ordinul milisecundelor) între două corpuri care nu au interacționat înainte de ciocnire și nu interacționează nici după.

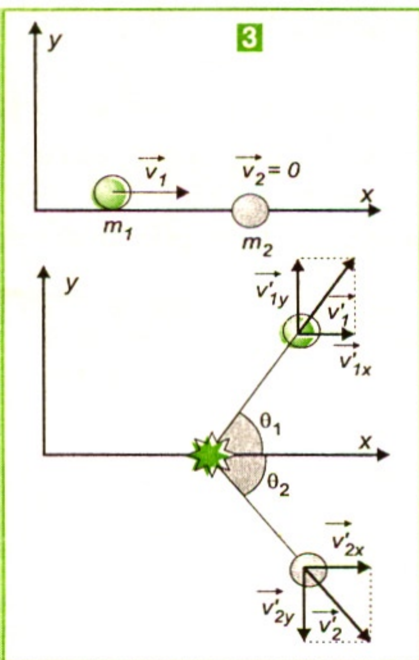
Când corpurile vin în contact apar două tipuri de forțe: forțele de frecare, care se opun mișcărilor relative ale corpurilor și sunt conținute în planul de contact, și forțele de apăsare normală care sunt situate perpendicular pe planul de contact și determină deformarea corpurilor. Inițial, când corpurile vin în contact, are loc o transformare a energiei cinetice relative în energie potențială de deformare până când vitezele corpurilor devin egale, pentru ca apoi energia potențială de deformare să se retransforme în energie cinetică. Deformațiile elastice acumulează energie potențială, care este redistribuită corpurilor integral (la ciocnirile elastice) sau parțial (la ciocnirile plastice corpurile rămân deformate sau chiar fac masă comună, rămânând alipite). Deoarece procesul ciocnirilor durează foarte puțin, neglijăm impulsul forțelor externe

care acționează asupra sistemului format din cele două corpuri. Forțele de frecare și forțele de apăsare normală fiind forțe de natură internă pentru sistem nu pot modifica impulsul total al sistemului.
În cazul ciocnirilor a două corpuri se aplică întotdeauna legea de conservare a impulsului.

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = m_1\vec{v}_1' + m_1\vec{v}_2'$$

unde cu m_1 și m_2 am notat masele celor două puncte materiale, cu $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$ vitezele înainte de ciocnire iar cu $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$ vitezele imediat după ciocnire.

Ecuația vectorială a conservării impulsului se proiectează:
- pe axa de mișcare când ciocnirea are loc pe direcția centrelor corpurilor (ciocnire unidirecțională);
- pe două axe de coordonate când ciocnirea nu este pe direcția centrelor (ciocnire oblică sau excentrică). 3



În primul caz alegem pe direcția de mișcare o origine și un sens și proiectăm relația vectorială:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v'_1 + m_2v'_2.$$

Vitezele au semnul plus sau minus după cum corpurile se mișcă în sensul pozitiv sau negativ al axei.
În cazul ciocnirii în plan alegem axele *Ox* și *Oy* și proiectăm:
pe *Ox*: $m_1v_{1x} + m_2v_{2x} = m_1v'_{1x} + m_2v'_{2x}$;
pe *Oy*: $m_1v_{1y} + m_2v_{2y} = m_1v'_{1y} + m_2v'_{2y}$.

3.7.1. Ciocnirea perfect plastică*

Dacă într-o barcă ce se mișcă pe un râu se aruncă un obiect, barca și obiectul se vor mișca împreună.
Un baschetbalist aflat în mișcare prinde o minge și se mișcă împreună cu aceasta, sau (dacă derulăm invers filmul acestei mișcări) mingea sare din brațele baschetbalistului.
Prin urmare procesele de cuplare a corpurilor și procesul invers, de decuplare, vor fi studiate cu aceleași legi.

Ciocnirea perfect plastică este ciocnirea în care corpurile se cuplează și se mișcă împreună. **1**

$$\text{Cum } \vec{v}_1' = \vec{v}_2' = \vec{v}_c' \Rightarrow m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_c \Rightarrow \vec{v}_c = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Când corpurile se mișcă pe aceeași direcție, alegem direcția drept axă de coordonate și obținem

$$v_c = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}.$$

În ciocnirea perfect plastică, energia cinetică nu se conservă și se degajă căldură prin scăderea energiei cinetice.

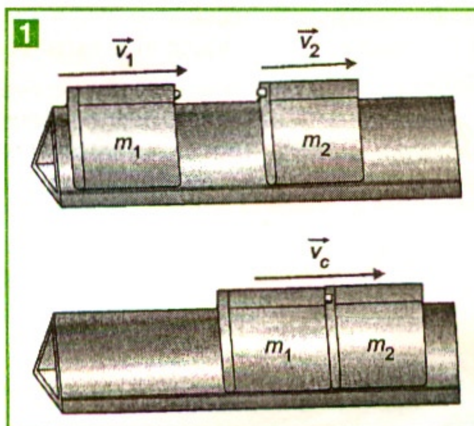
$$Q = \left|\Delta Ec_{\text{pierdută}}\right| = Ec_i - Ec_f = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2)v_c^2}{2}.$$

Efectuând calculele obținem:

$$Q = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2)^2$$

$$\text{unde } m_r = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$$

se numește masă redusă a sistemului de corpuri m_1 și m_2, iar $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}_{r_{12}}$ se numește viteza relativă a primului corp față de al doilea înainte de ciocnire.



3.7.2. Ciocnirea perfect elastică*

Este o ciocnire ideală, deoarece în urma procesului de ciocnire deformațiile corpurilor (chiar și cele microscopice) dispar total. O putem considera totuși în cazul ciocnirilor bilelor de oțel și la bilele de biliard.

Ciocnirea perfect elastică este ciocnirea în care deformațiile dispar total și energia cinetică a corpurilor înainte și după ciocnire se conservă.

Analizăm cazul ciocnirilor perfect elastice și centrice a două corpuri care se deplasează pe axa *Ox*. Scriem ecuațiile corespunzătoare conservării impulsului și energiei cinetice (înainte și imediat după ciocnire) pe direcția de mișcare:

$$\begin{cases} m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot v'_1 + m_2 \cdot v'_2 \\ \dfrac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \dfrac{m_2 \cdot v_2^2}{2} = \dfrac{m_1 \cdot (v'_1)^2}{2} + \dfrac{m_2 \cdot (v'_2)^2}{2} \end{cases}.$$

Din rezolvarea sistemului de ecuații obținem vitezele imediat ulterioare ciocnirii:

$$v'_1 = \frac{2(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1 + m_2} - v_1; \text{ și } v'_2 = \frac{2(m_1 v_1 + m_2 v_2)}{m_1 + m_2} - v_2.$$

Cazuri particulare

a) Dacă $v_2 = 0$ (corpul 2 este în repaus înainte de ciocnire), obținem expresiile pentru calcularea vitezelor corpurilor imediat după ciocnire:

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1 \text{ și } v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1;$$

iar dacă, în plus, corpurile au mase egale, atunci $v'_1 = 0$ și $v'_2 = v'_1$; în acest caz, corpul (1) care ciocnește transferă integral mișcarea (viteza, impulsul și energia cinetică) corpului ciocnit (2).

b) Dacă $m_1 < m_2$ și $v_2 = 0 \Rightarrow v_1' < 0$ și $v_2' > 0$, adică după ciocnirea perfect elastică corpul cu masă mică se întoarce, iar cel cu masă mare începe să se miște în sensul în care a fost ciocnit.

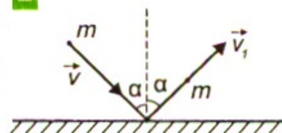
c) Dacă $m_1 > m_2$ și $v_2 = 0 \Rightarrow v_1' > 0$ și $v_2' > 0$, adică după ciocnirea perfect elastică ambele corpuri se mișcă în sensul în care au fost ciocnite de primul corp.
În concluzie, corpul ciocnit aflat inițial în repaus se va mișca în sensul în care a fost ciocnit.

d) Dacă cel de-al doilea corp este în repaus înainte de ciocnire și are masa mult mai mare decât primul ($m_2 >> m_1$), atunci cel de-al doilea corp practic nu se deplasează, iar primul se întoarce cu o viteză egală și de sens opus:

$$v'_1 = 2\frac{\frac{m_1}{m_2} - 1}{\frac{m_1}{m_2} + 1} v_1, \text{ unde } \frac{m_1}{m_2} \to 0 \Rightarrow v'_1 = -v_1 \text{ și } v'_2 = \frac{2\frac{m_1}{m_2}}{\frac{m_1}{m_2} + 1} v_1 \to 0.$$

Aceasta este ciocnirea cu un perete. 2

Dacă un corp lovește oblic un perete cu viteza v, sub un unghi de incidență α, după ciocnire corpul ricoșează cu o viteză egală în modul sub un unghi egal.



Probleme rezolvate

1. Un automobil cu masa m_1 = 1000 kg care se deplasează cu viteza v_1 = 15 m/s lovește un automobil cu masa m_2 = 1500 kg care staționează. Care este viteza comună după ciocnirea plastică a celor două autoturisme și ce energie se degajă ?

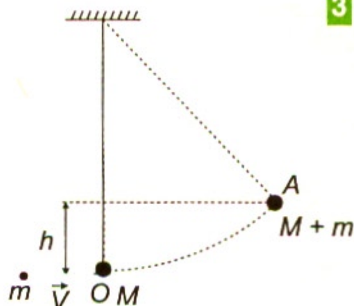
Rezolvare

Aplicăm legea conservării impulsului:

$$m_1v_1 = (m_1 + m_2)v_c \Rightarrow v_c = \frac{m_1v_1}{(m_1 + m_2)} = 6 \text{ m/s};$$

$$Q = |\Delta E_c| = \frac{1}{2}\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}v_1^2 = 67{,}5 \text{ kJ}.$$

2. Un corp cu masa m = 1 kg se mișcă orizontal cu viteza v = 5 m/s și ciocnește plastic și centric un corp cu masa M = 3 kg care atârnă de un fir inextensibil. 3 La ce înălțime se ridică cele două corpuri? (g = 10 m/s²)



Rezolvare

Aplicăm sistemului legea conservării impulsului:

$$m \cdot v = (M + m)v_c;$$

$$h = \frac{v_c^2}{2g} = \frac{m^2v^2}{2g(M + m)^2} = 7{,}81 \text{ cm}.$$

Aplicăm legea conservării energiei mecanice pentru corpul nou format: $E_{c0} = E_{pA}$.

3. Două bile de mase m_1 = 1 kg și m_2 =1,5 kg sunt suspendate de fire paralele, astfel încât bilele se ating. Prima bilă este deviată până la o înălțime h = 20 cm și lăsată liberă. Să se calculeze la ce înălțime se ridică fiecare bilă, dacă ciocnirea este perfect elastică.

Rezolvare

Aflăm viteza bilei 1 înainte de ciocnirea perfect elastică cu bila 2, aplicând legea de conservare a energiei mecanice.

$E_{cA} = E_{pO}$, deoarece în punctul O alegem nivelul de energie potențială zero. 4

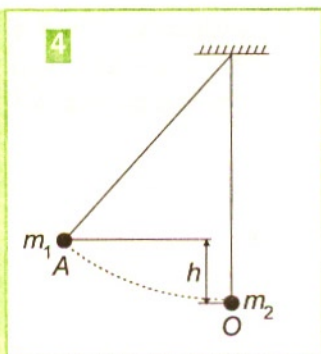
$$m_1gh = \frac{m_1v_0^2}{2} \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gh} = 2 \text{ m/s}.$$

Aflăm vitezele bilelor imediat după ciocnirea perfect elastică

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_0}{m_1 + m_2} = -0,4 \text{ m/s} \text{ și } v_2' = 2\frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2} = 1,6 \text{ m/s}$$

Conform legii de conservare a energiei aplicate pentru fiecare bilă obținem:

$$\frac{m_2 v_2'^2}{2} = m_2 g h_2 \rightarrow h_2 = \frac{v_2'^2}{2g} = \frac{4m_1^2 v_0^2}{2(m_1 + m_2)^2 g} \; h_2 = \frac{4m_1^2 h}{(m_1 + m_2)^2} = 12,8 \text{ mm.}$$



$$h_1 = \frac{v_1'^2}{2g} = \frac{(m_1 - m_2)^2 v_0^2}{(m_1 + m_2)^2 \cdot 2g} = \frac{(m_1 - m_2)^2 h}{(m_1 + m_2)^2} \Rightarrow h_1 = 8 \text{mm.}$$

Observație: semnul „–" al vitezei v_1' imediat după ciocnire înseamnă că bila 1 se întoarce, deoarece $m_1 < m_2$.

4. O bilă de biliard ciocnește perfect elastic și necentric o a doua bilă identică aflată inițial în repaus. Să se afle unghiul făcut de direcțiile de mișcare ale celor două bile după ciocnire.

Rezolvare

Notăm cu m masa fiecărei bile și cu v viteza inițială a bilei aflată în mișcare.
Notăm cu v_1 și v_2 vitezele bilelor imediat după ciocnirea elastică necentrică.
Aplicăm legile de conservare ale impulsului și ale energiei cinetice.

$$m\vec{v} = m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \quad (1)$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} \Rightarrow v^2 = v_1^2 + v_2^2 \quad (2)$$

Ridicăm la pătrat ecuația vectorială (1) și obținem

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha.$$

Pe baza acestei relații și din (2) se obține $\cos\alpha = 0$, deci $\alpha = 90°$, adică după ciocnirea perfect elastică necentrică direcțiile de mișcare ale bilelor de biliard sunt perpendiculare.

5. O bilă A cu masa m_1 = 2 kg se mișcă cu o viteză v_A = 5 m/s spre o bilă cu masa m_2 = 2 kg aflată în repaus. După ciocnire direcția de ciocnire a bilei A formează cu direcția inițială de mișcare un unghi α = 30°, în timp ce bila B se va mișca, față de direcția inițială de mișcare a bilei A, sub un unghi β = 60°. Să se realizeze diagrama de compunere a impulsurilor și să se afle vitezele celor două bile după ciocnire.

Rezolvare

Se aplică legea de conservare a impulsului **5ab**.

$$\vec{p}_A = \vec{p}\,'_A + \vec{p}\,'_B.$$

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate.

Pe *Ox*: $p_A = p'_A \cos\alpha + p'_B \cos\beta \Rightarrow m_1 v_A = m_1 v'_A \cos\alpha + m_2 v'_B \cos\beta$

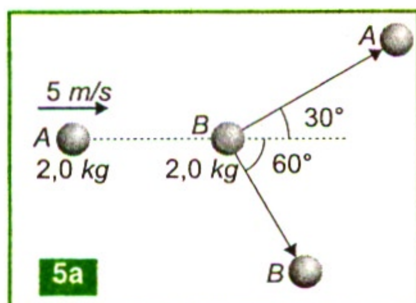
Pe *Oy*: $0 = p'_A \sin\alpha - p'_B \sin\beta \Rightarrow m_1 v'_A \sin\alpha = m_2 v'_B \sin\beta$

$$\Rightarrow m_2 v'_B = \frac{m_1 v'_A \sin\alpha}{\sin\beta}.$$

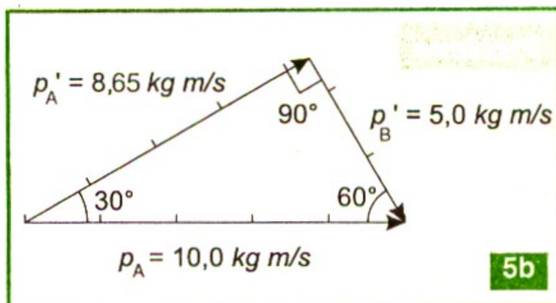
Se înlocuiește în relația precedentă și obținem:

$$v'_A = \frac{v_A \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = 4{,}32\,\text{m/s};$$

$$\text{și}\quad v'_B = \frac{m_1 v_A \sin\alpha}{m_2 \cdot \sin(\alpha+\beta)} = 2{,}5\,\text{m/s}.$$



5a



5b

TESTE

Copiază în caiet următoarele afirmații și răspunde cu A dacă afirmația respectivă este adevărată sau cu F dacă este falsă:

1. A F. Dacă o pasăre își ia zborul, creanga deviază în sens opus.

2. A F. Pentru a se întoarce la navă, un cosmonaut căruia i s-a rupt cablul de susținere și are un obiect aruncă obiectul astfel ca acesta să se depărteze de navă.

3. A F. Povestirea lui Münchausen, că ar fi ieșit dintr-o mlaștină trăgându-se de păr este adevărată.

4. A F. Caracatițele se pot deplasa ejectând periodic apa pe care o absorb.

5 A F. Dacă într-o barcă ușoară ne deplasăm de la un capăt la celălalt, barca se deplasează în același sens.

6. A F. Pentru un sistem izolat, forțele interne pot modifica doar impulsul corpurilor componente, dar nu pot modifica impulsul total al sistemului.

7. A F. Un balon umplut cu aer care nu are legat orificiul se deplasează în sens contrar jetului de aer care iese din el.

8. A F. Dacă nu ții bine cu mâna un ciocan când bați un cui, acesta poate ricoșa, deoarece impulsul sistemului ciocan-cui se conservă.

9. A F. Două bile identice care se ciocnesc perfect elastic și centric schimbă vitezele între ele.

10. A F. În ciocnirea plastică nu se conservă energia cinetică.

11. A F. În toate procesele de ciocnire, impulsul sistemului se conservă.

Probleme

1. Alegeți informația corectă referitoare la ciocnirea perfect elastică:

a) căldura degajată are expresia $Q = \dfrac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)^2$;

b) corpurile se mișcă împreună cu aceeași viteză;

c) viteza relativă a primului corp față de al doilea imediat înainte de ciocnire este egală și de sens contrar cu viteza relativă a aceluiași corp față de al doilea imediat după ciocnire;

d) corpurile se deplasează cu viteze egale în sens contrar.

2. Două bile cu masele $m_1 = 2$ kg și $m_2 = 8$ kg se deplasează una spre cealaltă pe aceeași direcție, cu vitezele $v_1 = 10$ m/s și $v_2 = 2$ m/s. Căldura degajată în urma ciocnirii plastice este:

a) 3,2 J; b) 28,8 J; c) 51,2 J; d) 115,2 J.

3. O bilă mică și masă m_1 ciocnește perfect elastic și frontal o altă bilă, aflată inițial în repaus, cu masa m_2. Raportul energiilor cinetice finale ale celor două bile imediat după ciocnire $\dfrac{E_{c2}}{E_{c1}}$ este:

a) $\dfrac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$; b) $\dfrac{4m_1 m_2}{(m_1 - m_2)^2}$; c) $\left(\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2$; d) $\dfrac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}$.

4. Un corp cu viteza $3v$ și cu masa m ciocnește perfect elastic un alt corp care se deplasează în același sens cu viteza v și care are masa $2m$. Ce viteză are după ciocnire corpul cu masa m și în ce sens se deplasează ?
a) $v/3$ în același sens; b) $13v/4$ în sens opus; c) $11v/4$ în același sens;
d) $v/3$ în sens opus.

5. Două bile cu masele m_1, m_2 se mișcă una spre cealaltă, viteza bilei cu masa m_1 fiind de n ori mai mică decât viteza celeilalte bile. Cunoscând că după ciocnirea perfect elastică bila cu masa m_2 se oprește, raportul maselor celor două bile m_2/m_1 este:
a) $(n-2)/n$; b) $(n-1)/n$; c) $(n+1)/n$; d) $(n+2)/n$.

6. Două bile cu masele $m_1 = 1$ kg și $m_2 = 3\ m_1$ sunt suspendate de fire paralele, cu aceeași lungime, astfel că inițial bilele se ating. Bila cu masa m_1 este deviată până la înălțimea $h_1 = 16$ cm și apoi este lăsată liber. Ansamblul celor două bile după ciocnirea plastică se va ridica la înălțimea:
a) 1 cm; b) 22 cm; c) 54 cm; d) 8 cm.

7. Un corp de masă $M = 6$ kg este suspendat de un plafon cu ajutorul unor fire de lungime $l = 1,6$ m și de greutate neglijabilă, formând un pendul în repaus. Pe direcție orizontală vine un corp punctiform de masă $m = 4$ kg cu viteza $v_0 = 10$ m/s care ciocnește plastic corpul de masă M, încastrându-se în acesta. Pendulul format deviază în urma ciocnirii cu unghiul α față de direcția verticală ($g = 10$ m/s²).
I) Care este viteza ansamblului de corpuri imediat după ciocnire?
a) $v = 4$ m/s; b) $v = 5$ m/s; c) $v = 6$ m/s; d) $v = 8$ m/s.
II) Ce fracțiune din energia cinetică cedează corpul de masă m, fracțiune care se transformă în căldură prin unirea corpurilor în ciocnirea plastică ?
a) 80 %; b) 60 %; c) 40 %; d) 20 %.
III) Care este valoarea unghiului α ?
a) $\alpha = \arccos\frac{v_0}{2}$; b) $\alpha = 30°$; c) $\alpha = 45°$; d) $\alpha = 60°$.

8. Un corp punctiform de masă $M = 7$ kg este suspendat cu ajutorul unui fir de lungime $l = 3,6$ m, de greutate neglijabilă, de un plafon, formând un pendul în repaus. Pe o direcție orizontală vine un corp punctiform de masă $m = 3$ kg cu viteza $v_0 = 10$ m/s care ciocnește corpul de masă M pefect elastic, unidimensional, perpendicular pe direcția firului de lungime l. Pendulul deviază în urma ciocnirii cu unghiul α față de direcția verticală ($g = 10$ m/s).
I) Care este viteza corpului de masă M imediat după ciocnire:
a) $v = 6$ m/s; b) $v = 5$ m/s; c) $v = 4$ m/s; d) $v = 2$ m/s?
II) Ce fracțiune din energia sa cinetică cedează corpul de masă m corpului de masă M, în urma ciocnirii?
a) 24 %; b) 44 %; c) 64 %; d) 84 % ?
III) Care este valoarea unghiului α:
a) $\alpha = 60°$; b) $\alpha = 45°$; c) $\alpha = 30°$; d) $\alpha = 90°$?

9. Două corpuri identice (1) și (2) de masă M stau în repaus pe o suprafață orizontală netedă. La un moment dat, dintre ele, o bilă cu masa m pleacă uniform spre corpul (1) pe care-l lovește perfect elastic, unidimensional imprimându-i o viteză v_1. Bila se întoarce în urma ciocnirii pe același drum și lovește în aceeași manieră corpul (2), căruia îi imprimă o viteză v_2. Care este raportul v_1/v_2?

10. Un corp de masă $m = 3$ kg, mișcându-se pe o suprafață netedă orizontală cu viteza $v_0 = 2$ m/s, ciocnește perfect elastic, centric, un corp de masă 2 m aflat în repaus. Cunoscând durata ciocnirii, $\Delta t = 10$ ms, aflați valoarea F a forței de impact între cele două corpuri.

11. Două bile, una ușoară și alta grea, se mișcă una spre alta cu viteze egale. După ciocnirea perfect elastică, bila grea se oprește. De câte ori este mai mare masa bilei grele decât a celei ușoare?

12. O armă are masa de 1000 ori mai mare decât a glonțului. Să se calculeze în ce raport se distribuie la tragerea cu arma $E_{c\ armă}/E_{c\ glonț}$:
a) 0,1; b) 0,01; c) 1; d) 0,001.

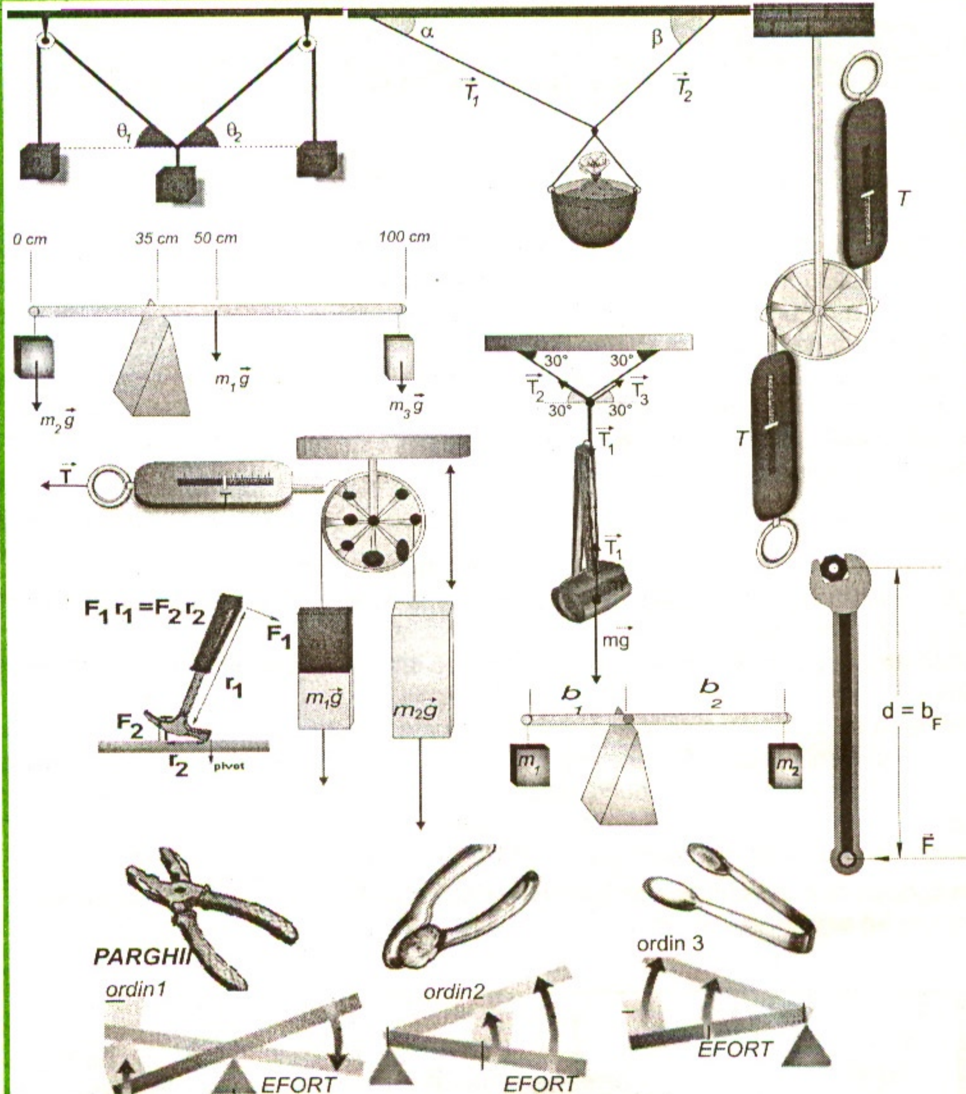
13. Doi patinatori cu masele m_1 și m_2 stau, unul în fața celuilalt, pe gheață lucioasă, și țin fiecare în mână câte un capăt al unei sfori întinse. La un moment dat, unul dintre ei începe să tragă de sfoară, aceasta scurtându-se cu viteza u. Care sunt valorile vitezelor cu care cei doi patinatori se apropie unul de altul?

a) $v_1 = 2\left(\frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1}\right)u; v_2 = 0;$ b) $v_1 = \frac{m_1 u}{m_1 + m_2}, v_2 = \frac{2m_2 u}{m_1 + m_2};$

c) $v_1 = \frac{m_2 u}{m_1 + m_2}, v_2 = \frac{m_1 u}{m_1 + m_2};$ d) $v_1 = \frac{2m_1 u}{m_1 + m_2}, v_2 = \frac{2m_2 u}{m_1 + m_2}.$

14. Un patinator cu masa $M = 80$ kg ține în mână o bilă cu masa $m = 8$ kg și se află în repaus pe gheață. La un anumit moment, aruncă bila cu viteza $u = 10$ m/s față de sol. Știind că $g = 10$ m/s^2 și valoarea coeficientului la frecare $\mu = 0{,}001$, spațiul parcurs de patinator până la oprire este:
a) 50 m; b) 60 m; c) 80 m; d) 100 m.

15. Într-un leagăn stă un copil care ține în mână o bilă cu masa $m_1 = 2$ kg. Lungimea leagănului este $l = 2$ m, iar masa copilului și a leagănului este $m_2 = 30$ kg. Viteza aproximativă cu care trebuie să arunce bila pentru ca leagănul să se ridice cu $h = 0{,}1$ m este:
a) 12 m/s; b) 16 m/s; c) 21 m/s; d) 27 m/s.



CAPITOLUL 4

ELEMENTE DE STATICĂ

„La baza artei și științei se află emoția. Cel care nu poate fi curios sau nu mai poate simți uimire este asemenea unei lumânări stinse."

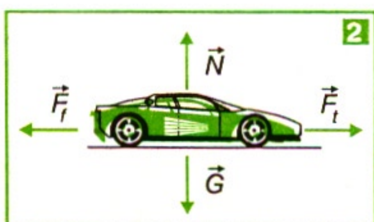
A. Einstein

Condițiile în care corpurile efectuează o translație

În diverse situații trebuie să ne păstrăm echilibrul, de exemplu, când ne urcăm pe un scaun să luăm un obiect, când se spală geamurile unei clădiri pe exterior etc. 1
Când stăm pe un scaun suntem în echilibru static deoarece forța de greutate este compensată de forța de reacțiune normală.
O mașină parcată sau aflată în mișcare rectilinie și uniformă este în echilibru static în primul caz și, respectiv, echilibru dinamic în cel de-al doilea. În ambele cazuri, rezultanta forțelor care acționează asupra mașinii este nulă. Când mașina se mișcă uniform echilibrul este dinamic: greutatea și forța de reacțiune normală se compensează pe verticală ($\vec{N}+\vec{G}=0$), în timp ce pe orizontală forța de tracțiune a motorului este compensată de forța de frecare la alunecare 2 $(\vec{F}_{tractiune}+\vec{F}_{frecare}=0)$.
Când asupra unui corp solid acționează mai multe forțe, acestea produc același efect ca o forță rezultantă.
Dacă asupra corpurilor solide rigide acționează una sau mai multe forțe, acestea pot produce mișcări de translație și mișcări de rotație.
Mișcarea de translație este mișcarea în care toate punctele unui corp se mișcă identic pe traiectorii paralele. Din aceasta cauză este suficient să studiem numai mișcarea unui singur punct, putând reduce astfel solidul rigid la modelul punctului material.
Mișcarea de rotație este mișcarea în care punctele corpului descriu cercuri concentrice cu o axă, numită axă de rotație.

Un corp se află în echilibru de translație dacă rezultanta forțelor care acționează asupra lui este nulă, adică:

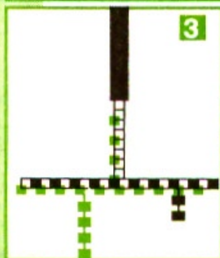




$$\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i=0$$

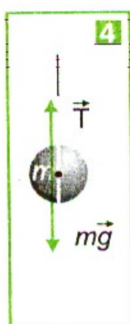
Această ecuație poate fi proiectată pe axele de coordonate O_x și O_y astfel:

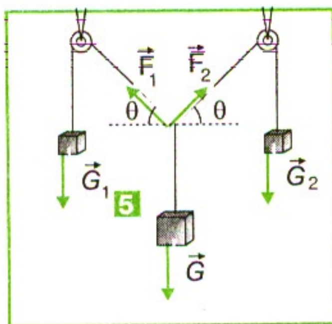
$$F_{1x}+F_{2x}+\ldots+F_{nx}=0;$$
$$F_{1y}+F_{2y}+\ldots+F_{ny}=0.$$

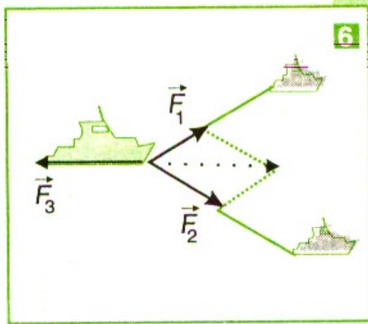


De cârligul unui dinamometru suspendăm o riglă în centrul de simetrie și citim greutatea $G_{riglă}$. 3 Rigla este divizată în părți egale și are orificii la fiecare diviziune. Atârnăm două corpuri cu greutățile $\vec{G}_1$ și, respectiv, $\vec{G}_2$ în diverse orificii astfel încât rigla să nu se rotească (să fie în echilibru) față de punctul de suspendare:

$$\vec{R}=0 \text{ sau } \vec{G}_1+\vec{G}_2+\vec{G}_{rigla}+\vec{F}=0 .$$







adică $\vec{G}_1 + \vec{G}_2 + \vec{G}_{rigla} = -\vec{F}$ (indicația dinamometrului, F este egală cu greutatea totală a corpurilor atârnate și a riglei).
Dacă translatăm sistemul cu viteză constantă, indicația dinamometrului nu se modifică, deci rezultanta forțelor exterioare care acționează asupra lui este nulă și în mișcare de translație.

Aplicarea condițiilor de echilibru de translație

Dacă un punct material este supus acțiunii a două forțe $\vec{F}_1$ și $\vec{F}_2$, acesta va fi în echilibru de translație numai dacă rezultanta forțelor este nulă $(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0)$, adică cele două forțe trebuie să fie opuse $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, deci $F_1=F_2$.
De exemplu, o lampă este în echilibru de translație, deoarece greutatea sa este compensată de tensiunea din tija lămpii.
În cazul firelor inextensibile, forțele de tensiune sunt egale între ele în orice punct al firului în care practicăm o tăietură imaginară, dacă firul are greutate neglijabilă în raport cu greutatea $\vec{G}$ a solidului atârnat, 4 . La echilibru: $\vec{T} + \vec{G} = 0$. Rezultă $G = T$, deci forța de tensiune în punctul de suspendare este egală în mărime cu greutatea corpului atârnat.

Greutatea $\vec{G}_1$ a unui corp poate fi echilibrată de forțe care pot fi paralele sau concurente coplanare. Putem folosi un dispozitiv care modelează studiul echilibrului corpului solid supus acțiunii unor forțe concurente, coplanare.

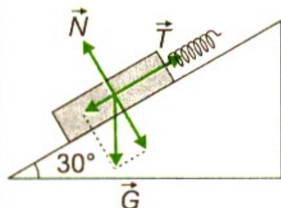
Un corp solid de greutate $\vec{G}$ este supus acțiunii a două forțe care sunt transmise prin intermediul scripeților. 5 Un scripete fix schimbă direcția de acțiune a unei forțe fără a-i schimba mărimea, deci $F_1 = G_1$ și $F_2 = G_2$. La echilibru este satisfăcută condiția:

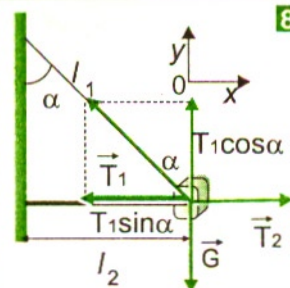
$$\vec{R} = 0 \quad \text{sau} \quad \vec{G} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

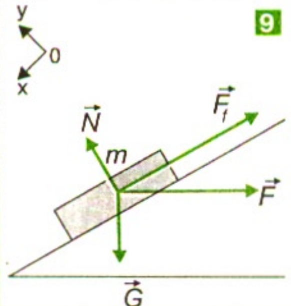
Un corp solid care este supus acțiunii a trei forțe concurente este în echilibru dacă rezultanta obținută pe diagonala paralelogramului constituit cu doi vectori forță este opusă celui de-al treilea vector forță:

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0; \quad \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -\vec{F}_3 \quad 6$$

Dacă asupra unui punct material acționează mai multe forțe concurente, punctul material va fi în echilibru de translație dacă rezultanta tuturor forțelor este nulă.







Exercițiu grafic

Pe un plan înclinat lucios (fără frecări), care face un unghi de 30° cu planul orizontal, este ținut în echilibru un corp solid prin intermediul unui dinamometru. 7 Forța de întindere în resort are valoarea citită la dinamometru $T = 1{,}5$ N. Greutatea corpului are mărimea G = 3,5 N. Să se găsească mărimea rezultantei celor doi vectori

Ne alegem o scară convenabilă: 1 cm lungime să corespundă unei forțe cu mărimea 1 N. Reprezentăm forța de întindere $\vec{T}$ printr-un vector, paralel cu planul înclinat, de lungime 1,5 cm și forța de greutate $\vec{G}$ printr-un vector vertical de lungime 3,5 cm. Cu ajutorul compasului găsim punctul de intersecție al arcelor de cerc, cu razele 1,5 cm și respectiv 3,5 cm. Vârful ascuțit al compasului îl fixezi în vârful vectorilor construiți $\vec{G}$ și, respectiv, $\vec{T}$. Citim lungimea vectorului R', aproximativ 3 cm din paralelogramul construit. Deci forța rezultantă are valoare $R' = 3$ N. Dacă vei calcula mărimea rezultantei cu formula cunoscută vei obține:

$$R' = \sqrt{1{,}5^2 + 3{,}5^2 + 2 \cdot 1{,}5 \cdot 3{,}5 \cdot \cos 120°}\ \text{N} = \sqrt{2{,}25 + 12{,}25 - 2 \cdot 1{,}5 \cdot 3{,}5 \cdot 0{,}5}\ \text{N} = 3\ \text{N}.$$

Concluzie: în construcția grafică am făcut aproximări succesive de construcție și de citire care ne-au condus la estimarea ordinului de mărime cu o mică eroare, acceptabilă. Rezultanta R' este egală și de sens contrar cu forța de reacțiune normală N din partea planului înclinat.

Probleme rezolvate

1. O lampă cu masa $m = 4$ kg este suspendată 8. Cunoscând lungimile tijelor de susținere $l_1 = 40$ cm și $l_2 = 30$ cm, să se afle valorile celor două tensiuni în tije.

Rezolvare

Reprezentăm forțele care acționează asupra lămpii și impunem condiția de echilibru acesteia:

$$\vec{G} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = 0$$

Proiectăm relația vectorială pe axele de coordonate:

$$\text{pe } Ox: \quad T_1 \sin\alpha - T_2 = 0$$

$$\text{pe } Oy: \quad T_1 \cos\alpha - G = 0$$

$$\Rightarrow T_1 = \frac{mg}{\cos\alpha} = \frac{mgl_1}{\sqrt{l_1^2 - l_2^2}} = 60{,}47\ \text{N}.$$

$$T_2 = T_1 \sin\alpha = mg \cdot tg\alpha = \frac{mgl_2}{\sqrt{l_1^2 - l_2^2}} = 45{,}35\ \text{N}.$$

2. Un corp cu masa $m = 1$ kg este menținut în poziția de echilibru pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 30°$, dacă asupra corpului se acționează cu o forță de apăsare orizontală **9**. Cunoscând-se valoarea coeficientului de frecare la alunecare dintre corp și plan $\mu = 0{,}1$, să se afle valoarea forței. ($g = 10$ m/s^2)

Rezolvare

Impunem condiția de echilibru corpului:

$$\vec{G} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_f = 0\ .$$

Proiectăm pe axele de coordonate și obținem:

Ox: $mg\sin\alpha - F_f - F\cos\alpha = 0;$

Oy: $N - mg\cos\alpha - F\sin\alpha = 0 \Rightarrow N = mg\cos\alpha + F\sin\alpha;$

$F_f = \mu N \Rightarrow mg\sin\alpha - \mu\, mg\cos\alpha - \mu\, F\sin\alpha - F\cos\alpha = 0.$

$$F = \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\mu\sin2\alpha + \cos\alpha} = 4{,}52\ \text{N}.$$

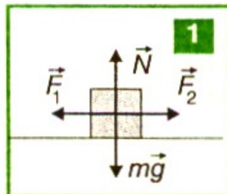
TESTE

1. AF Un corp de află în echilibru de translație, dacă rezultanta forțelor care acționează asupra lui este nulă.

2. AF Dacă descompunem o forță după axe perpendiculare (ortogonale), o componentă a forței poate fi mai mare ca modulul forței.

3. AF Pe un plan orizontal un corp este în repaus, dacă asupra corpului nu acționează nici o forță.

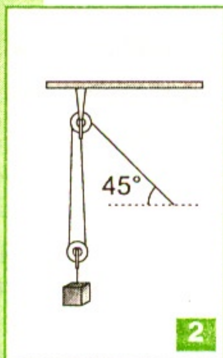
4. AF Corpul din figură este în echilibru de translație numai dacă forțele F_1 și F_2 sunt opuse **1**.



5. AF Dacă asupra corpului acționează numai două forțe, în același sens și egale în modul, corpul este în echilibru de translație.

6. AF Dacă asupra corpului acționează trei forțe, astfel că a treia forță este opusă rezultantei celorlalte două forțe, atunci corpul este în echilibru de translație.

Probleme



1. Ce reacțiune se dezvoltă în axa scripetelui, dacă greutatea corpului atârnat este G = 200 N și firul este înclinat față de orizontală la 45°? **2**.

2. Un corp cu masa $m = 1$ kg, este suspendat de un fir ideal. Cu ce forță trebuie să acționăm pentru a aduce firul într-o poziție în care acesta să formeze cu verticala un unghi $\alpha = 30°$. Care este în acest caz valoarea tensiunii în fir?

3. Să se calculeze rezultanta a două forțe identice cu modulul de 500 N, dacă acestea formează între ele un unghi $\alpha = 60°$.

4. Două corpuri cu masele $m_1 = 3$ kg și $m_2 = 2$ kg sunt legate între ele printr-un fir ideal. Sistemul de corpuri se află pe un plan orizontal, astfel că mișcarea corpurilor se face cu frecare, coeficientul de frecare fiind $\mu = 0,2$. Să se afle cu ce forță trebuie să acționăm asupra sistemului de corpuri pentru ca acestea să se miște rectiliniu și uniform și care este în acest caz tensiunea din firul de legătură. ($g = 10$ m/s²)

5. Pentru a menține în repaus un corp pe un plan înclinat cu unghiul $\alpha = 30°$, trebuie apăsat corpul cu o forță minimă normală pe plan F_1. Pentru a menține în repaus același corp pe același plan înclinat trebuie să acționăm cu o forță minimă orizontală F_2. Cunoscând valoarea coeficientului de frecare la alunecare dintre corp și plan ($\mu = 0,43$), să se afle raportul forțelor F_1/F_2.

6. Un corp cu masa $m = 5$ kg este suspendat de tavan prin intermediul a două fire, astfel încât un fir formează cu tavanul un unghi $\alpha = 30°$, iar celălalt fir formează cu tavanul un unghi $\beta = 60°$. Să se afle care sunt valorile tensiunilor din cele două fire. ($g = 10$ m/s²)

Condițiile în care corpurile efectuează o rotație

La deschiderea unei uși acționează: greutatea ușii și forța din partea celui care acționează mânerul ușii. **1** Forța care produce efectul de rotație al ușii față de axa de rotație, paralelă cu tocul ușii, este forța cu care acționează omul.

Când acționăm cu o forță perpendiculară pe axa de rotație a unui corp, aceasta produce o mișcare de rotație. Dacă prelungirea forței întâlnește axa de rotație, constatăm că nu apare efect de rotație. Acționează cu un deget, în diferite puncte ale unei spițe de pe o roată de bicicletă, pentru a o pune în mișcare de rotație, **2**. Dacă o forță cu mărimea mică acționează mai departe de axa de rotație, roata va fi rotită mai ușor, iar dacă o forță cu mărimea mult mai mare acționează mai aproape de axă, roata poate fi rotită mai greu. Dacă direcția forței trece prin axă nu mai poți să pui roata în mișcare de rotație, indiferent de mărimea forței dezvoltate. Asupra roții mai acționează și alte forțe (greutatea roții și reacțiunea axei de rotație), dar efectul lor de rotație este nul, deoarece trec prin axă.

Corpul rigid reprezintă un model al corpului nedeformabil sub acțiunea forțelor exterioare, adică distanța dintre punctele acestuia rămâne neschimbată.

Vom considera o forță a cărei direcție este perpendiculară pe axa de rotație a unui cilindru rigid: forța are tendința să-l rotească în sensul acelor de ceasornic sau în sens invers ?

Un observator poate considera sens de rotație pozitiv pentru efectul acțiunii forței $\vec{F}$ și sens de rotație negativ pentru efectul forței de greutate $\vec{G}$. **3**

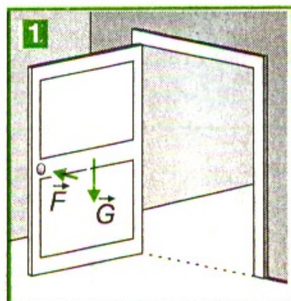
Momentul forței $\left(\vec{M}_F\right)$ măsoară efectul de rotație pe care îl produce forța asupra unui corp rigid. Momentul forței este definit de produsul vectorial dintre vectorul de poziție al punctului de aplicație al forței considerate și vectorul forță:

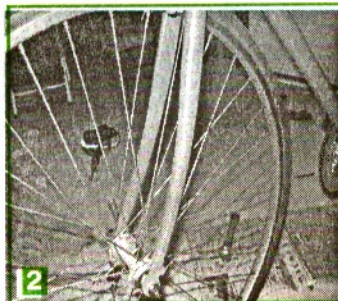
$$\vec{M}_F = \vec{r} \times \vec{F}$$

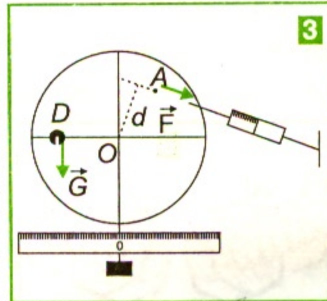
Modulul momentului forței F se obține cu relația:

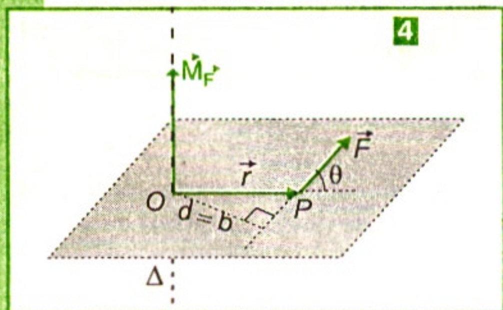
$$M_F = r \cdot F \cdot \sin\left(\vec{r}, \vec{F}\right) = F \cdot b$$

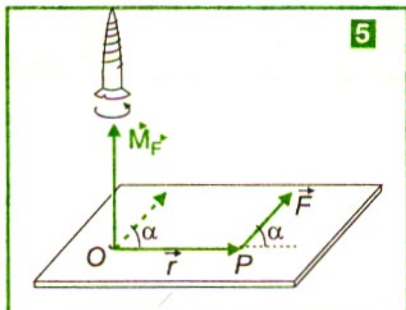
deci mărimea momentului unei forțe perpendiculare pe o axă de rotație (Δ) se măsoară prin produsul acestei forțe F și brațul ei b. Brațul forței notat cu b sau d,











față de axa de rotație Δ care trece prin polul (punctul) O din planul în care îl reprezentăm, reprezintă lungimea perpendicularei coborâte din punctul O pe dreapta suport a forței, $\vec{F}$ 4. Momentul forței este un vector perpendicular pe planul format de vectorii $\vec{r}$ și $\vec{F}$, orientat în sensul înaintării unui burghiu așezat perpendicular pe planul menționat și care se rotește în sensul aducerii vectorului $\vec{r}$ către $\vec{F}$ „pe drumul cel mai scurt" (încât $\vec{r}$ să descrie unghiul minim) pentru ca vectorii $\vec{r}$ și $\vec{F}$ să devină paraleli. 5 Unitatea de măsură:

$$[M_F]_{SI} = [r]_{SI}\,[F]_{SI} = 1\ \text{Nm}.$$

Observăm că efectul forței nu depinde de poziția punctului de aplicație al forței $\vec{F}$ pe suportul său, ci depinde de distanța *b* dintre suportul forței și axa de rotație Δ impusă solidului. Momentul unei forțe în raport cu o axă (proiectat pe axă) are un semn: + sau – . Putem considera, momentul forței pozitiv dacă această forță tinde să rotească solidul în sens trigonometric și negativ dacă această forță tinde să-l rotească în sensul de rotație al acelor de ceasornic 6. Două forțe se pot înlocui cu o forță echivalentă care ar produce același efect de rotație?

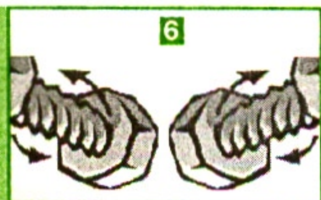
Care dintre componentele forței $\vec{F}$ din figura 7 produc efect de rotație?

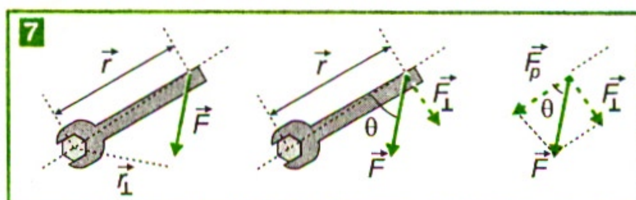
Dacă dreapta suport a forței trece prin axă, corpul nu se va roti.

Pentru rotația unui solid rigid față de o axă fixă, doar componenta forței care este perpendiculară pe axă poate produce efect de rotație. Dacă acționăm asupra unui disc cu o forță a cărei dreaptă suport de acțiune este paralelă cu axa de rotație (perpendiculară pe planul discului), discul nu se va roti. Componenta paralelă cu axa de rotație ar produce îndoirea axei dacă efectul ei nu ar fi contracarat de reacțiunea axei.

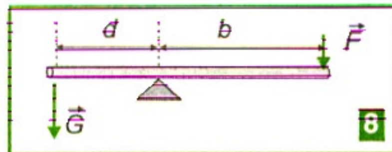
Condițiile în care un corp este în echilibru de rotație

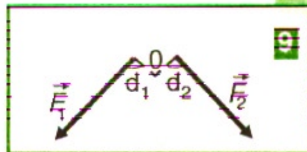
Efectul de rotație al fiecărei forțe se simte independent de acțiunea altor forțe. Efectul de rotație al forței de greutate $\vec{G}$ asupra unei pârghii sau unei tije articulate ar fi în sens trigonometric, dacă ar acționa singură. 8 Efectul de rotație al forței de greutate





poate fi anihilat de efectul de rotație al forței $\vec{F}$, care ar produce o rotație în sensul acelor de ceasornic.





Un corp solid S este în echilibru de rotație sub acțiunea mai multor forțe coplanare și perpendiculare față de o axă de rotație atunci când momentul rezultant al tuturor forțelor față de axa de rotație este nul. Dacă figurăm o axă de rotație perpendiculară pe o coală de hârtie, putem desena forțele, perpendiculare pe axă, care pot produce rotația corpului solid S 9. Dacă toate forțele $\vec{F}_i$ și vectorii $\vec{r}_i$ (unde $i = 1, 2, 3, ...$) sunt într-un plan perpendicular pe axă, atunci momentele tuturor forțelor și momentul rezultant sunt orientate în lungul axei. Fiecare moment ale forțelor tinde să rotească corpul în sens trigonometric sau în sensul acelor de ceasornic. În locul acestor momente putem găsi un moment rezultant care înlocuiește toate momentele forțelor aplicate simultan corpului considerat. Ne alegem un sens de rotație de referință: sensul acelor de ceasornic sau sensul trigonometric. Observăm că în cazul când sunt aplicate mai multe forțe unui corp solid care tind să-l rotească față de o axă, atunci suma algebrică a momentelor lor în raport cu această axă este nulă la echilibru de rotație. Această condiție este valabilă și în cazul în care forțele sunt concurente.

Un corp solid execută mișcare de rotație neuniformă dacă suma momentelor forțelor în raport cu un pol sau cu o axă este nenulă și execută o mișcare de rotație uniformă ($\vec{\omega} = \text{constantă}$) sau este în repaus dacă această sumă este nulă. În ultimul caz spunem că din punct de vedere al rotației se obține echilibrul solidului în mișcare, respectiv, în repaus.

Un corp se află în echilibru de rotație în raport cu o axă sau cu un pol, dacă rezultanta momentelor forțelor calculate față de aceea axă sau pol este nulă:

$$\vec{M}_{\vec{R},\Delta} = 0$$

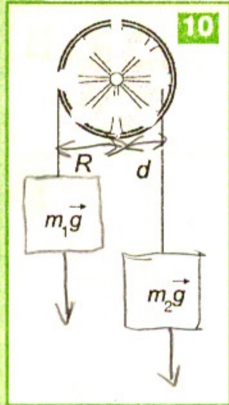
Momentul forței de reacțiune din axa de rotație a corpului solid este nul, deoarece brațul forței de reacțiune este nul.

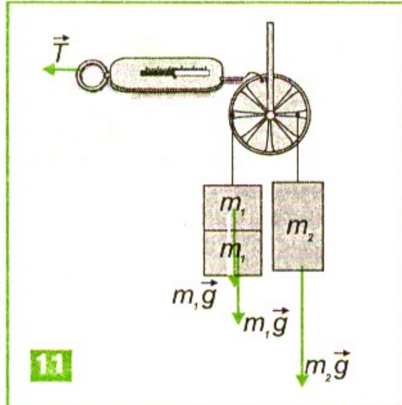
Dacă un solid, care se poate roti față de o axă, este în echilibru sub acțiunea a două forțe, atunci momentul forței care antrenează corpul într-un sens în raport cu axa este egal cu momentul forței care îl antrenează în sens invers în raport cu aceeași axă:

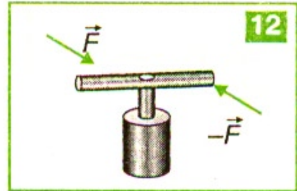
$$\vec{M}_{\vec{F}_1,\Delta} + \vec{M}_{\vec{F}_2,\Delta} = 0.$$

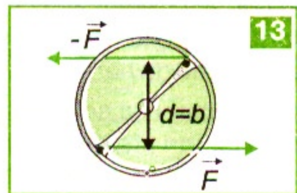
Aplicarea condiției de echilibru de rotație în diferite situații

a) *Dacă momentul forței active din exterior este egal în mărime cu momentul forței de frecare față de axa de rotație, atunci roata stă pe loc sau se rotește cu viteză unghiulară constantă și fiecare punct de pe roată execută o mișcare circulară uniformă. La rotația unui solid în jurul unei axe de rotație (axă impusă ca la o roată sau pe care și-o alege instantaneu ca la rostogolirea unui disc), toate punctele materiale efectuează mișcări circulare cu aceeași viteză unghiulară $\vec{\omega}$. Acțiunile de contact ale axei asupra unei roți sau disc sunt echivalente cu o forță de reacțiune în punctele de pe axă.









Remarcăm că direcțiile de acțiune ale greutății proprii ale unei roți echilibrate și reacțiunii axei R_Δ intersectează axa de rotație și au momentele nule.

b) *Dacă utilizăm o bară sau un disc cu orificii de care atârnăm corpuri de greutate G_1 și, respectiv, G_2 putem verifica experimental condiția de echilibru din punct de vedere al rotației față de axă:

$$\vec{M}_{\vec{G}_1,O} + \vec{M}_{\vec{G}_2,O} = 0. \quad \textbf{10}$$

Constatăm că pentru diverse forțe sau distanțe este satisfăcută relația: $M_{G_1,O} - M_{G_2,O} = 0$, deci $G_1R - G_2d = 0$ unde R este raza scripetelui, iar d este distanța față de centrul scripetelui 0, la care se prinde corpul de masă m_2. Dacă mai și tragem prin intermediul unui dinamometru care indică valoarea tensiunii T din resort, vor fi alte valori care satisfac relația: $2G_1R + TR - G_2d = 0$. **11**

Rezultanta forțelor aplicate unui corp produce același efect ca și forțele aplicate corpului. Dacă forța rezultantă este nulă atunci și momentul rezultant este nul față de axa de rotație? Forțele $\vec{F}$ și $-\vec{F}$ sunt opuse, egale în mărime *($F_1 = F_2 = F$)*, dar de sens contrar, deci rezultanta $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$. **12**

Deoarece rezultanta forțelor este nulă, nu se produce o translație a corpului.

Cuplul de forțe este format din două forțe paralele, egale în modul, de sens contrar și care au dreptele suport diferite. **13** Distanța dintre dreptele suport ale forțelor se numește brațul cuplului și se notează cu b. Cele două forțe produc un moment față de un pol O, care se calculează astfel:

$$M_{cuplu,\,O} = Fb$$

Observăm că momentul cuplului depinde de mărimile forțelor și a brațului cuplului.

Cuplul de forțe are numeroase aplicații în practică: la tirbușon, la volan, la punerea în rotație a arborelui cotit la mașini etc. Se poate constata cu ușurință că efectul de rotație este mai mare asupra unui volan când mâinile sunt așezate diametral opus, deoarece brațul cuplului este mai mare.

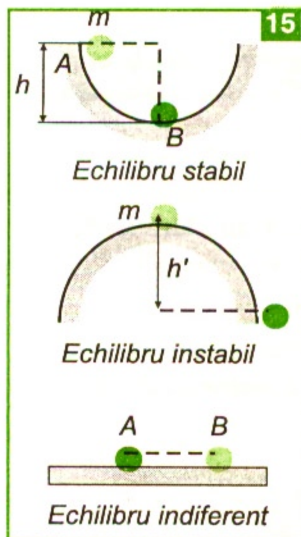
În concluzie, cuplul de forțe (două forțe paralele și opuse, cu rezultanta nulă) produce efect de rotație.

Evoluția unui sistem – starea de echilibru mecanic – energia potențială minimă a sistemului*

Analizăm trei tipuri de stări de echilibru ale unui corp sprijinit sau suspendat sub acțiunea cuplului forțelor: de greutate și de reacțiune a suprafeței sau axei de sprijin: 15

1) dacă este scos puțin din starea de echilibru (centrul de greutate urcă) și lăsat apoi liber, greutatea produce o rotație și îl aduce înapoi în starea de echilibru avută anterior. Se spune că echilibrul este stabil, deoarece corpul revine la poziția anterioară. Centrul de greutate mai coborât și o arie mai mare a bazei de sprijin oferă stabilitate mai mare față de răsturnare.
2) dacă este scos puțin din starea de echilibru (centrul de greutate coboară) și lăsat apoi liber, greutatea produce o rotație spre cealaltă stare de echilibru (stabil). Se spune că echilibru a fost instabil, deoarece corpul nu mai revine la poziția avută anterior.
3) când cuplul de forțe este nul și centrul de greutate rămâne la același nivel, dacă este scos din starea de echilibru și lăsat apoi liber, oricare stare este tot o stare de echilibru. Se spune că echilibrul este indiferent.

Din analiza oricărui sistem rezultă că orice sistem evoluează către o stare de echilibru mecanic, dintre care cea mai stabilă și cea mai probabilă stare de echilibru mecanic este caracterizată de energie potențială **minimă.**



Echilibru stabil

Echilibru instabil

Echilibru indiferent

Determinarea punctului de aplicație al rezultantei forțelor paralele*

Rezultanta $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ a două forțe paralele orientate în același sens are mărimea $R = F_1 + F_2$ și punctul de aplicație O pe dreapta care trece prin punctele de aplicație ale forțelor F_1 și F_2, în interior, de partea forței mai mari 16.
Pentru ca un corp supus celor două forțe să nu se rotească (de exemplu un corp transportat de două persoane) vom pune condiția de echilibru a momentelor forțelor față de punctul de aplicație al rezultantei:

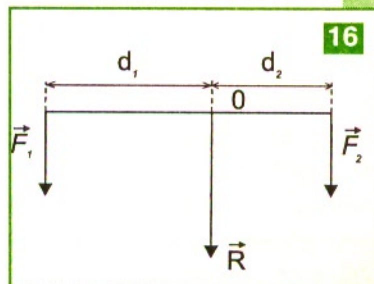
$$\vec{M}_{\vec{R},o} = \vec{M}_{\vec{F}_1,o} + \vec{M}_{\vec{F}_2,o};$$

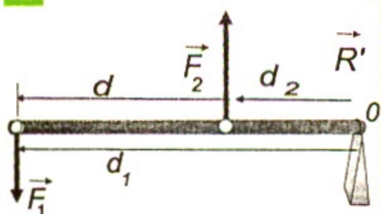
$$0 = F_2d_2 - F_1d_1 \text{ sau } F_1d_1 = F_2d_2 \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

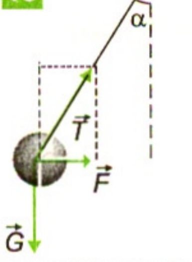
Exemplu numeric: Fie $F_1 = 2$ N, $F_2 = 8$ N și $d = 10$ cm. Obținem $F_{rez} = F_1 + F_2 = 10$ N

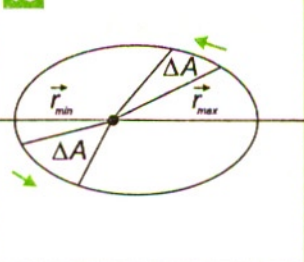
$$d_2 = \frac{F_1 d}{F_1 + F_2} = 2\text{ cm}.$$

b) În cazul forțelor paralele și de sens contrar, rezultanta are mărimea $R' = |F_1 - F_2|$ și punctul de aplicație O pe dreapta care trece prin punctele de aplicație ale forțelor F_1 și F_2, în exterior, de partea forței









mai mari. Deoarece corpul nu se rotește față de punctul de aplicație O al rezultantei R' obținem relația:

$$F_1d_1 - F_2d_2 = 0. \text{ 17}$$

Exemplu numeric: Fie $F_1 = 20$ N, $F_2 = 5$ N și $d = 10$ cm. Obținem $F_{rez} = F_1 - F_2 = 15$ N și

$$d_1 = \frac{F_2 d}{F_1 - F_2} = 3{,}33 \text{ cm}$$

Centrul de greutate al unui sistem de corpuri este punctul de aplicație al rezultantei forțelor de greutate ale acestor corpuri. La corpurile geometrice omogene (cu densitate ρ = const) îl găsim pe axe, plane sau centre de simetrie.

Probleme rezolvate

1. Un elev pune în mișcare circulară, în plan orizontal, un corp cu masa $m = 60$ g legat bine la capătul unui fir inextensibil și masă neglijabilă, ținut de celălalt capăt deasupra capului. Raza cercului este $r = 0{,}3$ m, când viteza tangențială a corpului este $v = 2$ m/s. Ce valoare are: F - forța de tensiune din fir în acest caz? ($g = 10$ m/s²) 18

Rezolvare

Din condiția de echilibru pe verticală și din expresia forței centripete obținem componentele forței de tensiune:

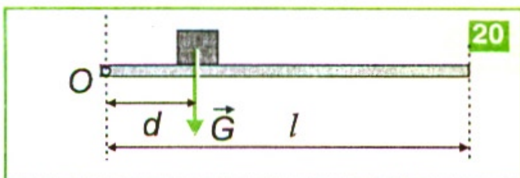
$$T_{vertic} = T\cos\alpha = mg = 0{,}6 \text{ N};$$

$$T_{oriz} = F_{cp} = ma_{cp} = \frac{mv^2}{r} = 0{,}8 \text{ N};$$

$$T = \sqrt{F_{oriz}^2 + F_{vertic}^2} \approx 1 \text{ N}.$$

2. *Forțele interplanetare sunt neglijabile în raport cu forța de atracție gravitațională Soare-planetă, deci sistemul Soare-planetă poate fi considerat sistem izolat care se mișcă în jurul centrului de masă, practic centrul Soarelui. Forța F de atracție planetă-Soare trece prin Soare. Știm din legea a doua a lui Kepler că raza vectoare a unei planete descrie arii egale în intervale de timp egale. 19

Dacă raza cercului se reduce, cum se modifică viteza unghiulară?



Rezolvare

Raza vectoare a unei planete descrie arii egale în intervale de timp egale. Forța F de atracție gravitațională din partea Soarelui asupra unei planete este o forță centripetă variabilă. Pentru unghiuri mici (α), descrise de raza vectoare (r), putem face aproximațiile următoare:

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{r(r\Delta\alpha)}{2\Delta t} = \frac{r^2\Delta\alpha}{2\Delta t} = \frac{1}{2}r^2\omega = const \Rightarrow r_1^2\omega_1 = r_2^2\omega_2$$

Dacă raza cercului se reduce, crește viteza unghiulară de rotație.

3. Un corp cu greutatea G = 20 N este așezat pe o scândură orizontală care este articulată în punctul de prindere O. 20 Corpul se află la distanța $d = 5$ cm de acest punct. Scândura are o lungime $l = 20$ cm și masa neglijabilă. Cu ce forță trebuie să acționăm și în ce sens, pentru a menține scândura orizontală?

Rezolvare

Deoarece scândura rămâne orizontală și nu se rotește față de articulație, înseamnă ca rezultanta momentelor forțelor față de articulație este nulă. Alegem sensul pozitiv pentru momentele care rotesc în sens trigonometric și obținem:

$$-M_{G,O} + M_{F,O} = -Gd + Fl = 0 \qquad F = Gd/l = 5\text{ N}$$

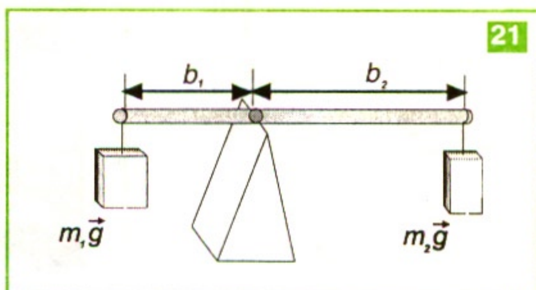
Forța F trebuie aplicată de jos în sus și observăm că este mai mică decât G.
Acesta este principiul pârghiilor. Pârghiile au fost realizate de Arhimede, care a spus „Dați-mi un punct de sprijin și ridic întreg Pământul".
Pârghiile au aplicabilitate în practică.

4. Fie o pârghie cu punctul de sprijin ca în figura 21. Ce mărime are forța G_1 care acționează la distanța $b_1 = 60$ cm și este echilibrată de greutatea $G_2 = 4$ N care acționează la distanța $b_2 = 30$ cm, astfel ca pârghia să rămână orizontală ?

Rezolvare

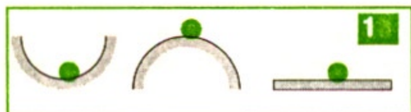
Dacă efectul acțiunii forței $\vec{G}_2$ este în sensul de rotație al acelor de ceasornic, pe care îl considerăm negativ, atunci efectul greutății, de sens contrar, $\vec{G}_1$ este anulat la echilibru. Obținem:

$G_1b_1 = G_2b_2$; $G_1 = G_2b_2/b_1 = 2$ N.

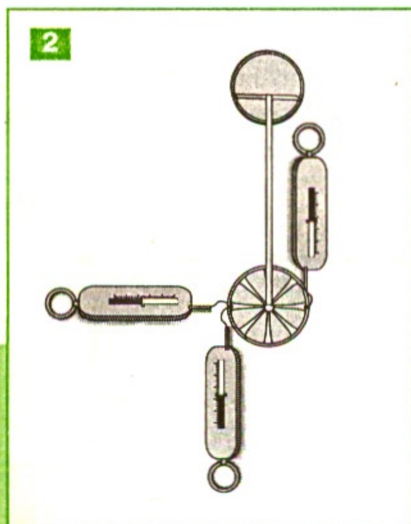


TESTE

1. AF. Dacă vectorii $\vec{r}$ și $\vec{F}$ sunt coliniari, ei nu produc efect de rotație.
2. AF. Dacă vectorii $\vec{r}$ și $\vec{F}$ sunt perpendiculari, ei produc un efect de rotație maxim.
3. AF. Prima bilă este în echilibru stabil. 1
4. AF. Bila a doua este în echilibru instabil. 1
5. AF. Bila a treia este în echilibru indiferent. 1
6. AF. Tensiunea orizontală produce efect de rotație asupra roții din figură. 2
7. AF. Orice tensiune verticală obligă rota să se rotească. 2
8. AF. Tensiunile verticale formează un cuplu de forțe. 2
9. AF. Apele curgătoare evoluează către o stare cu energie potențială minimă. 3
10. AF. Dacă acționăm asupra unei uși cu o forță perpendiculară pe ușă este mai ușor de rotit.
11. AF. Starea de imponderabilitate este o stare caracterizată de energie potențială minimă. 4









Probleme

1. O bară este menținută în poziție orizontală prin acțiunea unei forțe $F = 10$ N la distanța $d = 10$ cm față de axa de rotație. Dacă direcția forței nu se schimbă, ce valoare trebuie să aibă forța F' la distanța $d' = 1$ cm pentru a menține echilibrul sistemului ?

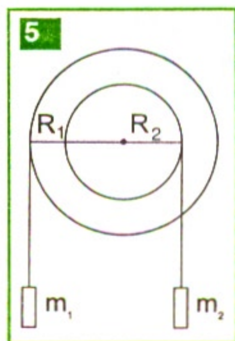
2. Un scripete dublu are razele $R_1 = 10$ cm și $R_2 = 2$ cm. Se agață de scripetele cu rază mare un corp cu masa $m_1 = 4$ kg. Care este valoarea masei corpului m_2, astfel încât scripetele să nu se rotească după prinderea acestui corp ? **5**

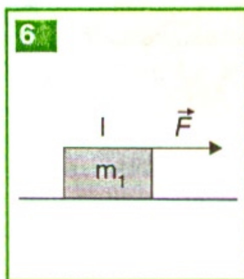
3. Un muncitor ține o scândură omogenă de un capăt, astfel că scândura formează cu orizontala un unghi $\alpha = 60°$. Scândura are masa $m = 10$ kg. Dacă direcția forței cu care muncitorul acționează asupra scândurii este perpendiculară pe aceasta, care este mărimea forței cu care acesta susține scândura ? ($g = 10$ m/s^2)

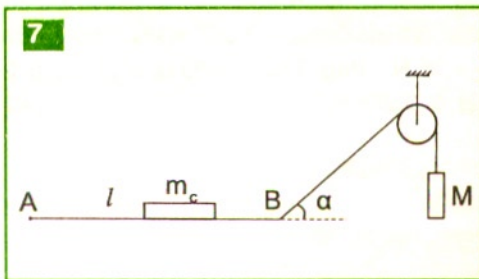
4. Un corp cu masa $m = 2$ kg este de formă cubică cu latura $l = 10$ cm. Asupra corpului aflat pe un plan orizontal se acționează cu o forță orizontală F, aplicată pe o muchie superioară a cubului. Care este mărimea minimă a forței pentru care cubul se răstoarnă ? **6** ($g = 10$ m/s^2)

5. O bară cilindrică cu lungimea $l = 1$ m, este confecționată jumătate din oțel cu densitatea $\rho_1 = 7800$ kg/m^3 și jumătate din aluminiu cu densitatea $\rho_2 = 2700$ kg/m^3. Presupunând bara cilindrică, cu același diametru, unde trebuie suspendată bara pentru ca ea să rămână în echilibru ?

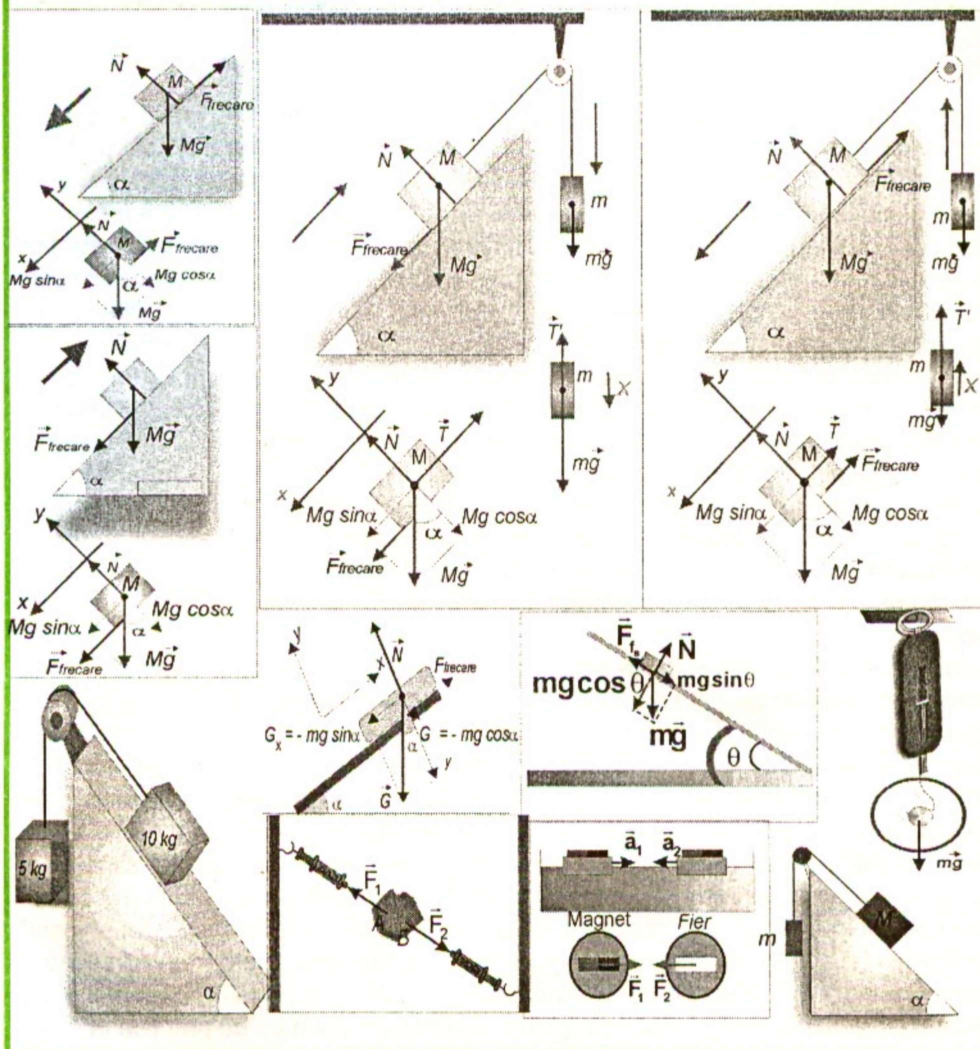
6. O bară cu masa m_b=2 kg și lungimea $l = 1$ m, este menținută în poziție orizontală în condițiile în care se poate roti față de o axă care trece prin capătul A, iar de celălalt capăt B, se prinde prin intermediul unui fir ce trece peste un scripete un corp cu masa $M = 10$ kg. Firul face cu orizontala un unghi $\alpha = 30°$. La ce distanță de capătul A poate fi pus un corp cu masa $m_c = 15$ kg ? **7**







Pag. 17: 1. a) 2. c) 3. b) 4. c); se produce reflexie totală. 5. a) 6. b) 7. b) 8. c) 9. c) 10. b) 11. d) 12. b) 13. a) 14. d) 15. b) 16. c. **Pag. 31:** 1. d) 2. a) 3. b) 4. b) 5. d) 6. c) 7. a) 8. b) 9. a) 10. b) 11. c) 12. c) 13. c) 14. d) 15. c) **Pag. 33:** 1. a) f_1 = 10 cm, lentilă convergentă; f_2 = −50 cm, lentilă divergentă; b) x_2 = 25 cm, imaginea este reală, răsturnată și egală cu obiectul; c) x_2 = 12,5 cm, imaginea este reală. 2. a) x_2 = 120 cm; b) ecranul trebuie deplasat spre dreapta cu 10 cm; c) d = 10 cm, $\beta = 2/3$. 3. a) d = 30 cm; b) d_2 = 2,5 cm. 4. a) f_1 = − 10 cm, f_2 = 12,5 cm; b) pelicula se așază la 50 cm; c) $\beta = -1{,}25$. **Pag. 39**: 1. a) 2. c) 3. b) 4. b) 5. c) 6. c) **Pag. 47:** 1. a) 2. c) 3. b) 4. d) 5. c) 6. b) 7. b. **Pag. 59:** 1. b) 2. d) 3. b) 4. b) 5. a) 2 m/s; b) 1,67 m/s; c) (0,1); (3,4); (4,7) 6. a) 3 m/s; b) 100 s. 7. 13,33 s. 8. $v_{apă}$ = 6,5 km/h, $v_{barcă}$ = 18,5 km/h. 9. a) 1336 s; b) 1339,2 s; c) 1333 s. **Pag. 63:** 1. b) 2. d) 3. c) 4. $t = \left|\frac{l_1 + l_2}{v_1 - v_2}\right|$. 5. b) 2 s, 6 m; c) 5 m/s; d) 40 m. **Pag. 68:** 1. c) 2. a) 3. a) 4. a) 5. a) $v = 5 - 4t$; b) v_0 = 5 m/s, t_{0p} = 1,25 s; c) s_{0p} = 3,125 m. 6. a) 17 m/s; b) 15 m/s; c) 20 s; d) 200 m. 7. a) 9 m/s; b) 24 N; c) 18 m. 8. a) mișcare încetinită; b) −2 m/s²; c) 12 m/s. 9. a) 1,6 s; b) 38,4 m; c) 7 m. 10. a) 2,828 m/s; b) 28,28 m/s; c) 23,285 m. **Pag. 75:** 1. c) 2. b) 3. d) 4. b) 5. c) 6. a) 7. c) 8. t = 10 s. **Pag. 79:** 1. d) 2. d) **Pag. 86:** 1. c) 2. c) 3. a) 4. a) 5. a) 6. a) 7. b) 8. b) 9. a) 100 N; b) 50 N; 10. a) 3,33 m/s², 26,66 N; b) 5 m/s². 11. a) T_1 = 23,265 N, T_1 = 19 N; b) se rupe primul fir; a = 4,1 m/s². **Pag. 92:** 1. c) 2. b) 3. a) a = 2,88 m/s²; b) 5,766 N; c) 0 N. **Pag. 99:** 1. c) 2. b) 3. c) 4. b) 5. d). 6. a) **Pag. 106:** 1. c) 2. b) 3. d) 4. c) 5. c) 6. a) 7. a) (40 N, forța verticală din desen) 8. c) 9. c) 10. c) 11. b) 12. a) 2,5 m/s², $F = \frac{mg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\beta + \mu\sin\beta}$. 13. a) 6,82 m/s²; b) 15,64 N; c) 5,115 N. **Pag. 117:** 1. d) 2. b) 3. b) 4. c) 5. d) 6. a) 7. d) 8. b. **Pag. 130:** 1. a) 2. b) 3. c) 4. d) 5. b) 6. c) 7. d) 8. a) 9. b) 10. d) 11. 6,875J. 12. a) 13. c) 14. c) 15. b) 16. b) **Pag. 138:** 1. d) 2. b) 3. d) 4. c) 5. c) 6. d) 7. a) **Pag. 144:** 1. b) 2. b) 3. b) 4. c) 5. b) 6. c) 7. a) **Pag. 153:** 1. d) 2. c) 3. d) 4. c) 5. b) 6. c) 7. a) 8. c) 9. b) 10. c) 11. a) v = 2 m/s; b) E_c = 2 J. **Pag. 161:** 1. d) 2. c) 3. d) 4. b) 5. b) 6. d) 7. c) 8. a) 9. b) 10. a) **Pag. 172**: 1. c) 2. d) 3. b) 4. a) 5. d) 6. a) 7. I. a) II. b) III. d) 8. I. a) II. d) III. a) 9. $\frac{m - M}{m + M}$; 10. 800 N. 11. de trei ori. 12. d) 13. c) 14. a) 15. c) **Pag. 180:** 1. 184,78 N. 2. F = 5,78 N, T = 11,56 N. 3. 865 N. 4. F = 10 N, T = 6 N când acționăm asupra lui m_2 și T = 4 N când acționăm asupra lui m_1. 5. n = 2,5. 6. T_1 = 43,25 N, T_2 = 25 N. **Pag. 189:** 1. 100 N. 2. 20 kg. 3. 25 N. 4. $F \geq 10$ N. 5. 37,857 cm de capătul de oțel. 6. 0,266 m.



CAPITOLUL 5

Lucrări de laborator

Fenomenul fizic, observat în natură sau provocat în laborator, reprezintă stările pe care le are un sistem fizic în momente succesive ale unui interval de timp. Scopul unui experiment este ca, pe baza datelor lui, să obținem o concluzie sau să susținem unele teorii.

5.0 Introducere

Orice lucrare de laborator trebuie să urmărească un scop anume. Elevii trebuie să cunoască teoria lucrării și să o aplice în practică. Profesorul descrie apoi aparatul sau instrumentul folosit, se fac determinările experimentale și se fac apoi calculele. Pentru a obține o valoare cât mai apropiată de cea căutată trebuie făcute mai multe măsurări, obținându-se valori diferite. Valorile foarte depărtate se elimină și apoi se face media aritmetică a valorilor determinate. Trebuie amintit că orice măsurare este afectată de erori. Erorile de măsurare pot fi: instrumentale (datorate sensibilității și clasei de precizie a instrumentelor și aparatelor folosite), de metodă (datorate imperfecțiunii metodei de măsurare alese), personale (datorate pregătirii experimentatorului), de model (datorate imperfecțiunii modelului asociat mărimii fizice de măsurat), influenței mediului ambiant (datorate condițiilor de utilizare impuse de firma costructoare), de calcul. Eroarea de măsurare reprezintă modulul diferenței dintre valoarea medie a mărimii fizice calculate și valoarea măsurată pentru acea mărime fizică.
Când vrei să faci un experiment prin care să verifici legi sau să determini mărimi și constante fizice trebuie să știi teoria, să adaptezi cerințele la dispozitivele didactice din dotare sau să găsești alte materialele necesare și să prelucrezi datele experimentale.
Rezumatele următoare nu devin șabloane obligatorii și nu îngrădesc libertatea profesorului de a alege varianta pe care o consideră optimă pentru elevii și dotarea laboratorului în explorarea și experimentarea dirijată a unor fenomene și procese fizice. Fiecare profesor are dreptul să alterneze activitatea obositoare bazată pe efort individual de documentare-memorare din diverse surse de informare cu activitățile care solicită efortul de grup sau asistat de calculator. Învățarea activă cu ajutorul calculatorului stimulează recunoașterea conceptelor specifice fizicii cu ajutorul simulărilor pe calculator, creativitatea și competiția, găsirea și folosirea informației în colaborarea pe echipe, adaptarea treptată a metodelor tradiționale la această ,,tehnologie" de învățare și suplinirea prin simulări a dotării deficitare a laboratoarelor din licee.
Scopul utilizării calculatorului este învățarea în școală cu o pondere mult mai mare decât cu mijloacele tradiționale, apropierea conținutului învățării de practica învățării eficiente a fizicii, în centru fiind elevul și nu predarea noțiunilor ca atare. Apare interesul pentru motivația efortului: în ce scop și cu ce rezultate să învețe, deoarece calculatorul susține procesul de învățare eficientă și nu elimină alternativa clasică de învățare a fizicii.
Modelul de prezentare teoretică nu îl vom detalia la fiecare lucrare, deoarece ar crește ineficient numărul de pagini al manualului cu detaliile care depind de variantele de dotare a laboratorului, iar organizarea și modul de lucru o să fie prezentate de D-na sau D-l profesor.

5.1. Reflexia și refracția luminii

1. **Scopul lucrării** este verificarea legilor reflexiei și refracției luminii, precum și determinarea indicelui de refracție al unui mediu optic transparent.
2. **Teoria lucrării:** razele de lumină se reflectă pe oglinzile plane, ca și pe cele sferice, respectând legile reflexiei. 1
3. **Material didactic, procedeu experimental, înregistrarea și prelucrarea datelor.**

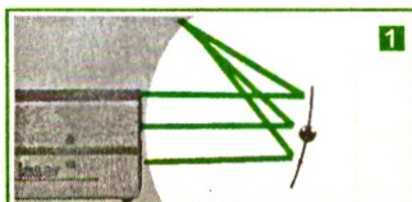
a) Se utilizează o oglindă plană și o lumânare aprinsă. Se observă imaginea lumânării în oglinda plană și se constată că imaginea se formează simetric și este egală cu obiectul. Deoarece imaginea nu se prinde pe un ecran se trage concluzia că ea este virtuală.

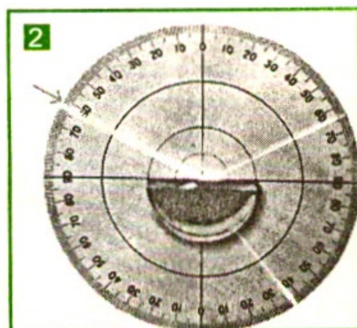
b) Se utilizează ca obiect o lumânare, un ecran și o oglindă concavă (de la microscop). Se aprinde lumânarea și se așază în stânga oglinzii concave, la o anumită distanță de acesta. Se deplasează ecranul în stânga până imaginea pe ecran devine cea mai clară. Se observă imaginea realizată de o oglindă sferică concavă și se constată că acestă imagine este reală pentru că se prinde pe ecran.

c) Folosim o diodă laser și un semicilindru din sticlă din trusa optică pe care îl prindem de o planșetă sau de un disc gradat. 2 Se măsoară (cu un raportor, dacă nu avem disc gradat) seturile de valori ale unghiurilor de incidență, *i*, reflexie, *r'*, și refracție, *r*, față de normalele pe suprafața de separare aer-sticlă. Se calculează valorile succesive ale raportului $\frac{i}{r'}$ și ale raportului $\frac{\sin i}{\sin r'}$.

Se analizează și se înregistrează într-un tabel.
Se determină indicele de refracție al materialului semicilindrului.
Se observă că $i' = r'$.

Nr. det.	i	r'	r	$\frac{i}{r'}$	$n = \frac{\sin i}{\sin r'}$	n_{mediu}	Observații asupra erorilor


1


2

5.2.* Determinarea indicelui de refracție al unei lame transparente

1. Scopul lucrării: determinarea indicelui de refracție al unei lame cu fețe plan paralele.

2. Teoria lucrării: Se utilizează legile de refracție la prima și la a doua față: sin $i = n$ sin r
Prin urmare raza emergentă este paralelă cu raza incidentă.

3. Material didactic, procedeu experimental, înregistrarea și prelucrarea datelor.
Se utilizează o lamă de sticlă cu fețe plan paralele, 4 ace, suport de polistiren și o riglă. **3** Pe o foaie de hârtie se trasează cu rigla cele două fețe plan paralele după care se duce o dreaptă înclinată care să taie ambele fețe și se pun două ace în punctele unde acea dreaptă taie fețele. Se privește din stânga feței și se așează al treilea ac astfel încât acesta sa fie coliniar cu celelalte. Se privește apoi din partea opusă și se înfige cel de-al patrulea ac astfel încât cele trei ace să se vadă în linie dreaptă. Se dă la o parte lama și se trasează celelalte raze. Apoi se măsoară unghiul de incidență și de refracție și se determină indicele de refracție. Se măsoară grosimea lamei și deplasarea și, cunoscând valoarea unghiului *i*, se calculează *n*.

i	sin$i$	r	sin$r$	n = sin$i$ /sin$r$

5.3.* Studiul propagării luminii prin prisma optică

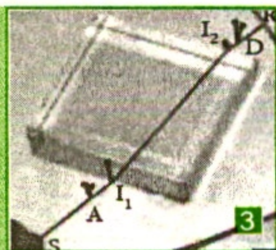
1. Scopul lucrării îl constituie punerea în evidență a razelor de lumină prin prisma optică **4** și determinarea indicelui de refracție al materialului prismei, pe baza legilor refracției.

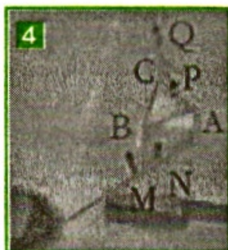
2. Teoria lucrării se bazează pe formulele prismei optice.

3. Material didactic, procedeu experimental, înregistrarea și prelucrarea datelor
Se pune o prismă optică transparentă pe o suprafață albă de hârtie și se desenează conturul acesteia. Se materializează direcția unei raze incidente de pe fața *AB*, prin două ace înfipte în punctele *M* și *N*. Se privesc, dinspre fețele *AC* și respectiv, *AB* ale prismei, imaginile acestor ace și se fixează pe direcția imaginilor alte două ace în punctele *P* și *Q*, astfel încât imaginea acului mai apropiat să o acopere pe a celorlalte, adică aceste ace să fie aliniate pe direcția imaginilor celorlalte două. Se îndepărtează prisma și se desenează direcția razei incidente din *M* și *N* până în punctul de incidență I_1 și direcția razei emergente din punctul I_2 până în *P* și *Q*. Se poate folosi fasciculul luminos al unei diode laser. Cu un raportor, se măsoară unghiurile i_1, i_2, r_1 și r_2. Se calculează indicele de refracție cu relațiile:

$$\sin i_1 = n \sin r_1 \text{ și } \sin i_2 = n \sin r_2$$

Valorile lui *n* trebuie să coincidă, în limita erorilor experimentale.





Se înregistrează rezultatele obținute într-un tabel.
Se verifică: $r_1 + r_2 = A$.

Se prelungesc razele incidentă și emergentă și se măsoară unghiul de deviație δ_1. Se verifică că $\delta = i_1 + i_2$.

5.4. Determinarea distanței focale a unei lentile convergente subțiri

1. Scopul lucrării: determinarea distanței focale a unei lentile convergente. Dacă obiectul și ecranul sunt la o anumită distanță unul de celălalt, se obțin imagini clare ale obiectului pe ecran numai pentru anumite distanțe între acestea.

2. Teoria lucrării se bazează pe formula lentilelor:

$$\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{f}\Rightarrow f=\frac{x_1x_2}{x_1x_2}$$

3. Material didactic, procedeu experimental, înregistrarea și prelucrarea datelor

Se utilizează ca obiect o lumânare, un ecran și o lentilă convergentă. Se aprinde lumânarea și se așază în stânga lentilei la o anumită distanță pe bancul optic. Se deplasează ecranul în dreapta lentilei până când imaginea pe ecran devine cea mai clară. Se măsoară x_1 și x_2 și se calculează distanța focală. Se fac mai multe determinări și se determină valoarea medie a distanței focale.

Datele se trec într-un tabel.



Nr. det.	$-x_1$ (cm)	$-x_2$ (cm)	f (cm)	f_{medie} (cm)	Observații asupra erorilor

$$D=-x_1+x_2\ \Rightarrow x_1^2+Dx_1+Df=0\Rightarrow$$

$$x_1=\frac{-D+\sqrt{D^2-4Df}}{2};x_1^{'}=\frac{-D+\sqrt{D^2-4Df}}{2}.$$

a) Stabilim distanța dintre obiect și ecran mai mare decât $4f$. Deplasăm lentila până când pe ecran se vor forma două imagini reale ale lumânării pentru două poziții distincte ale acesteia.

b) Stabilim distanța dintre obiect și ecran $D=4f$, iar lentila o așezăm la $2f$ de lumânare și de ecran. Pe ecran se observă formarea unei imagini clare, reale și răsturnate.

c) Stabilim distanța dintre obiect și ecran mai mică decât $4f$. Se observă că oriunde am deplasa lentila între lumânare și ecran, pe acesta se vede o pată luminoasă. Deci imaginea formată nu mai este reală.

5.5. Studiul unui aparat de fotografiat sau al unui microscop optic

1. Scopul lucrării: observarea unui preparat la microscopul optic și tehnica de obținere a fotografiilor.

2. Teoria lucrării se bazează pe modul de propagare al razelor de lumină prin aparatul de fotografiat și prin microscopul optic.

Identificăm părțile principale ale unui aparat de fotografiat și ale unui microscop optic, și 6 7. La nevoie folosim datele tehnice din fișa acestuia. Deoarece majoritatea știți să fotografiați, ar merita să faceți o expoziție de fotografii artistice sau științifice, de calitate? Ochiul este un instrument optic? Întâlnim la fiecare pas imagini și iluzii optice create de fizică ce ne fac viața mai frumoasă și mai colorată. De la simple jocuri de lumini, de la lentile și oglinzi până la televizor, o întreagă lume generată de "jocul" unor electroni, peste tot este la mijloc fizica. Zilnic, constatăm nenumărate fenomene, primim diverși stimuli din mediul înconjurător. Optica ne oferă posibilitatea de a analiza și clasifica acești stimuli, practic de a pricepe ceea ce ne înconjoară. 8ab


6


7

În cazul microscopului facem punerea la punct, așa cum am învățat și ne solicită d-nul profesor. Determinăm indicele de refracție al unei lame transparente din sticlă sau material plastic de grosime *d* (măsurată cu un șubler sau micrometru).

Pe cele două fețe opuse al unei lame transparente, se trasează cu cerneală două linii perpendiculare una pe cealaltă, astfel încât două puncte să fie pe aceeași normală. Se pune lama pe măsuța microscopului și se vizează prin obiectiv fața superioară a lamei. Se rotește șurubul lateral de reglaj până apare clar linia trasată pe această față și se notează diviziunea corespunzătoare de pe tamburul șurubului de reglaj sau se măsoară înălțimea măsuței microscopului, cu un șubler sau riglă, față de un reper. 9 Pentru a deplasa în jos obiectivul, se rotește șurubul de reglaj până apare clar imaginea prin lama transparentă a liniei trasate pe fața inferioară a acesteia și se notează diviziunea corespunzătoare. Diferența dintre diviziuni corespunde distanței *h* egală cu adâncimea aparentă la care se vede imaginea punctelor de pe fața inferioară. Se calculează indicele de refracție cu relația: $n = d/h$. Punerea la punct a microscopului se face individual. Dacă se vizează la începutul determinărilor fața inferioară a lamei și apoi se rotește șurubul de reglaj corespunzător deplasării $y = d - h$, când apare clar linia trasată pe fața superioară, atunci

$$n = \frac{d}{d-y}.$$

Principiile opticii geometrice

8a

Studiul optic

1. Principiul p... medii transp...

2. Principiul ... de razele ...


8b

La majoritatea microscoapelor din laboratoare, o diviziune $= 2\times10^{-6}$ m și la o rotație completă cu 50 diviziuni, deplasarea este egală cu 0,1 mm.

Lungimea este una din mărimile fizice fundamentale. Măsurarea lungimilor

cu o precizie de 0,1 mm se face cu șublerul. Șublerul este o riglă specială: divizată în mm, prevăzută cu un cioc și un cursor (partea mobilă). 10 Cursorul are un cioc și riglă de dimensiuni mai mici (vernier) gravată pe marginea ferestrei cursorului. Când ciocurile se ating, diviziunea zero a riglei este în prelungirea diviziunii zero a vernierului. Pentru măsurarea corectă a lungimilor cu șublerul se îndepărtează ciocurile șublerului astfel încât extremitățile lor să atingă marginile lungimii măsurate: zero de pe riglă la o margine și cu zero de pe vernier la cealaltă margine.
Se așează rigla șublerului astfel încât privirea gradațiilor să fie la incidență normală. Se citește pe riglă numărul întreg de milimetri până la diviziunea zero a vernierului, apoi se caută a câta diviziune de pe vernier coincide cu o diviziune oarecare de pe riglă.

5.6. Evidențierea inerției corpurilor

1. Scopul lucrării este evidențierea inerției corpurilor.

2. Teoria lucrării constă în evidențierea faptului că dacă asupra unui corp nu mai acționează o forță, acesta se mișcă uniform. Principiul inerției se poate formula astfel: orice corp se mișcă rectiliniu uniform atâta timp cît asupra lui nu acționează forțe exterioare.

3. Material didactic, procedeu experimental, înregistrarea și prelucrarea datelor

Pentru a verifica acest principiu, planul se așează în poziție orizontală (vezi 11). Se prinde corpul de masă *M* prin intermediul unui fir de corpul de masă m. Se neglijează frecarea dintre corpul *M* și masă. După ce corpul de masă *m* atinge suprafața plană (podeaua), corpul de masă *M* se va mișca în continuare rectiliniu și uniform, conform principiului inerției. Dacă se lucrează cu ceasul electronic, atunci experimentatorul va trebui să-și așeze dispozitivul de pornire și sosire în mod convenabil încât să poată să verfice acest principiu. De asemenea, relațiile de calcul vor fi stabilite de elevi.

5.7. Evidențierea efectului diferitelor interacțiuni

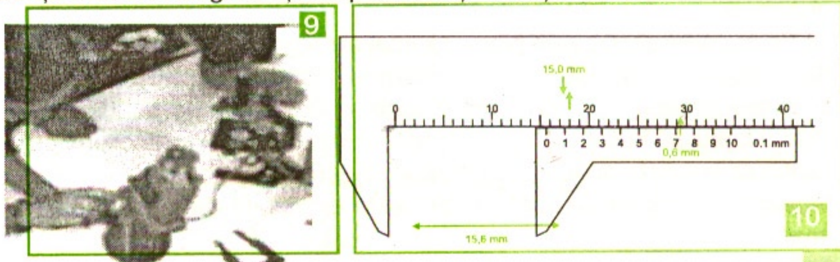
A. Studiul efectelor statice

1. Scopul lucrării îl reprezintă punerea în evidență a efectului diferitelor forțe care acționează asupra corpurilor, știind că forțele produc două tipuri de efecte: statice și dinamice.

2. Teoria lucrării constă în punerea în evidență a efectului static produs de diferite forțe.

3. Material didactic, procedeu experimental, înregistrarea și prelucrarea datelor

a) Se utilizează un dinamometru (resort). Suspendând corpul de resort acesta se va întinde până ce forța elastică va compensa greutatea corpului: $kx = mg$. În acest fel am pus în evidență atât efectul greutății corpului cât și al forței elastice.



b) Dacă introduci corpul într-un lichid 12 atunci asupra corpului acționează și forța arhimedică egală cu greutatea volumului V de fluid dislocuit:

$$F_A = \rho_l \cdot Vg$$

Echilibrul se obține când $mg - \rho_l Vg = kx'$. Scriem sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} \rho_c Vg = kx \\ \rho_c Vg - \rho_l Vg = kx', \end{cases}$$

Prin împărțirea lor obținem

$$\frac{\rho_c - \rho_l}{\rho_c} = \frac{x'}{x},$$

de unde rezultă

$$\rho_c = \frac{\rho_l x}{x - x'}.$$

În cazul apei

$$\rho_l = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Dacă folosim două lichide cu densitățile ρ_{l_1} și ρ_{l_2} scriem condițiile de echilibru pentru corpul complet introdus în lichide (de fiecare dată) și obținem densitatea unui lichid în funcție de densitatea celuilalt lichid:

$$\begin{cases} mg - \rho_{l1} Vg = kx_1 \\ mg - \rho_{l2} Vg = kx_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho_{l1} Vg = mg - kx_1 \\ \rho_{l2} Vg = mg - kx_2 \end{cases} \Rightarrow \rho_{l_1} = \rho_{l_2} \frac{mg - kx_1}{mg - kx_2}$$

unde $G = mg$, $F_1 = kx_1$, $F_2 = kx_2$ sunt valori citite pe dinamometru când corpul atârnă de cârligul acestuia în aer și respectiv în lichide. Compară valorile din tabelele de constante fizice (biblioteca, laboratorul liceului) cu cele prelucrate în tabel.

Nr. det	$\rho_c = \frac{\rho_l x}{x - x'}$	$\rho_{l1} = \rho_{l2} \frac{mg - kx_1}{mg - kx_2}$	Valori medii	Observații asupra erorilor

În acest fel am pus în evidență atât efectul greutății corpului cât și al forței lui Arhimede.

c) Se pune un corp pe un plan orizontal și se prinde cu un dinamometru vertical, astfel încât inițial resortul să nu fie deformat. Întindem treptat dinamometru și obsevăm indicația acestuia în momentul în care se desprinde corpul de plan. Punem în evidență faptul că la contactul cu planul orizontal apare o forță exercitată vertical în sus, astfel că aceasta scade treptat până la zero, moment în care corpul se desprinde. Aceasta este forța de contact care este exercitată de planul orizontal, numită normală N.

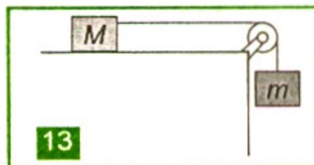
B. Studiul efectelor dinamice

1. Scopul lucrării: punerea în evidență a efectului dinamic se face măsurând accelerația imprimată unui corp de diferite corpuri.

2. Teoria lucrării se bazează pe punerea în evidență a efectelor dinamice ale diferitelor forțe care acționează asupra corpurilor, precum și determinarea accelerației unui corp. 13

3. Material didactic, procedeu experimental, înregistrarea și prelucrarea datelor

a) Pe o planșetă orizontală, un corp este pus în mișcare uniform accelerată prin intermediul unei sfori orizontale trecută peste un scripete (sau peste marginea planșetei) de corpurile cu greutăți cunoscute atârnate la celălalt capăt al sforii. Un corp solid alunecă pe o suprafață plană orizontală dacă forța de tracțiune $F_1 = F$ este mai mare decât forța de frecare $F_f = \mu Mg$.



Se cântărește talerul și apoi se pun mase marcate care împreună cu cea a talerului au masa *m*. Forța de tracțiune

$$F_t = mg\ .$$

Rezultă $mg - \mu Mg = (m + M)a$, de unde obținem accelerația *a*.
Coeficientul de frecare se determină înclinând planul cu diferite unghiuri și determinând unghiul la care corpul M se mișcă liber uniform (adică nelegat de *m*).
Datele se trec în tabel.

Nr.det	m(kg)	M(kg)	a(m/s^2)	a_m(m/s^2)	Observații

În acest fel s-a evidențiat acțiunea forței de tracțiune și a forțelor de frecare. Dacă se repetă experimentul pe pernă de aer (în cazul în care laboratorul este dotat cu pernă de aer) se neglijează efectul forței de frecare și se pune în evidență numai acțiunea exercitată de forța de tracțiune.
b) Un exemplu simplu de evidențiere a efectului forței de greutate se poate face și acasă prin măsurarea cu o aproximație a accelerației gravitaționale. Pentru acesta se lasă să cadă liber un corp de la diferite înălțimi și se măsoară timpul în care acesta ajunge la sol. Pe baza relației:

$$h = \frac{g}{2} t_c^2$$

se determină

$$g = \frac{2h}{t_c^2}$$

Datele se trec în tabel:

Nr.det	h(m)	t_c(s)	g(m/s^2)	g_m(m/s^2)	Observații

În acest fel am pus în evidență unul din efectele forței de greutate.

c) La capătul superior al unei tije verticale, prinsă rigid pe un cărucior aflat în mişcare accelerată, atârnă un fir cu plumb. **14** Pentru un observator terestru, rezultanta $\vec{R}$ dintre forța de.greutate $\vec{G}$ și tensiunea $\vec{T}$ în fir produce accelerația $\vec{a}$ de mişcare:

$$\vec{R} = \vec{G} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}$$

Proiectăm pe axa *Ox* (orizontală) și respectiv *Oy* (verticală) și obținem:

$$\begin{cases} T \cdot \sin\theta = ma \\ T \cdot \cos\theta - mg = 0 \end{cases}.$$

Cu ajutorul unui raportor se poate măsura unghiul θ pe care îl face firul cu verticala. Eliminăm tensiunea *T* și obținem:

$$\mathrm{tg}\theta = \frac{a}{g},$$

$$\text{deci } a = g \cdot \mathrm{tg}\theta .$$

Forța de inerție $\vec{F}_i = -m\vec{a}$ acționează pe direcția de mişcare a căruciorului, dar în sens invers. Dacă pe cărucior se fixează un vas cilindric gradat semitransparent din material plastic, atunci când acesta se mişcă accelerat se observă că suprafața liberă a lichidului din vas se înclină față de orizontală cu unghiul θ. Tangenta unghiului se poate calcula cu relația

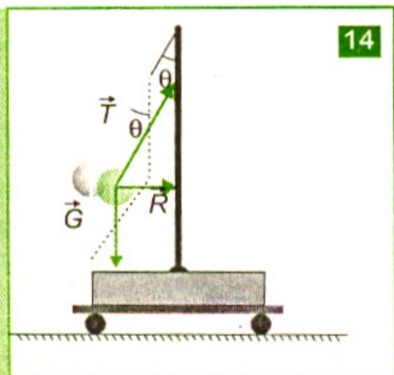
$$tg\,\theta = \frac{h}{R},$$

unde *h* este denivelarea care se poate citi pe zona udată de lichid pe peretele vasului cilindric de rază *R*. Obținem expresia de calcul a accelerației de mişcare:

$$a = g\frac{h}{R}.$$

Se înregistrează rezultatele obținute într-un tabel:

Nr. det	θ	*h/R*	*a*	a_{mediu}	Observații asupra erorilor



În acest fel am pus în evidență efectul combinat al forțelor de greutate și de tensiune în fir.

5.8. Evidențierea caracteristicilor perechilor de forțe care există într-o interacțiune

1. Scopul lucrării reprezintă punerea în evidență a forțelor pereche acțiune-reacțiune.

2. Teoria lucrării se bazează pe principiul trei al mecanicii.

3. Material didactic, procedeu experimental, înregistrarea și prelucrarea datelor

a) Pentru aceasta se utilizează două dinamometre ale căror cârlige se cuplează. Se constată că dacă le întindem ele vor indica în permanență aceleași valori, astfel că fiecare va acționa asupra celuilalt cu câte o forță, iar cele două forțe sunt egale în modul, au aceeași direcție, sensuri opuse și puncte de aplicație diferite.

b) Dacă doi elevi cu mase egale au în picioare role și interacționează prin intermediul unei sfori se constată că indiferent care dintre ei scurtează sfoara cei doi elevi se vor întâlni de fiecare dată în același loc. Acest lucru demonstrează că fiecare elev exercită asupra celuilalt câte o forță și că cele două forțe sunt egale în modul, au aceeași direcție, sensuri opuse și puncte de aplicație diferite.

c) Pentru echilibrarea unei balanțe se așează un vas cu un lichid pe un platan, iar cilindrul gol C_1 și mase marcate pe celălalt platan. 15ab Când se introduce cilindrul plin C_2 în lichidul din vas, balanța se dezechilibrează. Înseamnă că asupra cilindrului C_2 acționează din partea lichidului forța arhimedică și, conform principiului acțiunii și reacțiunii, asupra sistemului lichid - vas - platan acționează o forță egală și de sens opus. Lichidul cu densitatea ρ_{lichid} și înălțimea h_0 exercită pe fundul vasului presiunea hidrostatică

$$p = \rho_{lichid}\, g \cdot h_0$$

Forța de presiune exercitată pe fundul vasului de coloana de lichid cu înălțimea inițială h_0 din vas

$$F_0 = p\, S = \rho_{lichid}\, g \cdot h_0 S$$

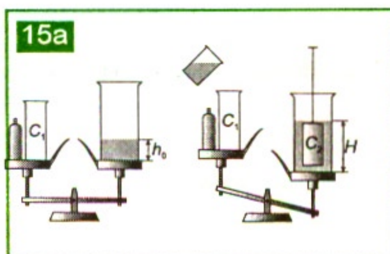
are o valoare mai mică decât forța de presiune exercitată de coloana de lichid cu înălțimea H obținută după introducerea cilindrului plin C_2 în lichidul din vas

$$F = p'\, S = \rho_{lichid}\, g\, H\, S.$$

Creșterea forței de presiune pe fundul vasului corespunde forței arhimedice:

$$F_A = \rho_{lichid} \cdot g(H - h_0)S = \rho_{lichid} \cdot g \cdot V_{lichid\,dislocuit} = G_{volum\,lichid\,dislocuit}\,.$$

Putem reechilibra balanța așezând greutăți marcate pe talerul unde se află corpul C_1. Deci lichidul acționează asupra corpului cu o forță în sus, iar acesta reacționează cu o forță în jos ceea ce are ca rezultat dezechilibrarea balanței.





5.9. Determinarea constantei de elasticitate

1. Scopul lucrării îl reprezintă determinarea constantei elastice a unui resort.

2. Teoria lucrării se bazează pe faptul că forța elastică depinde direct proporțional de alungirea unui resort.

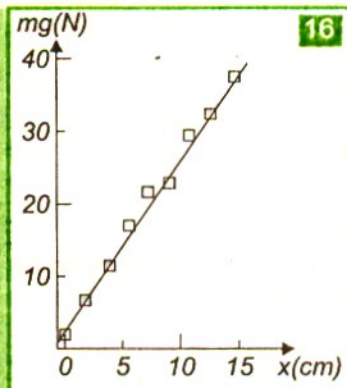
3. Material didactic, procedeu experimental, înregistrarea și prelucrarea datelor
Se atârnă pe rând diverse corpuri cu mase cunoscute *m* de capătul liber a unui resort și se măsoară alungirile produse, *x*, pe o riglă așezată paralel cu acestea. Din condiția de echilibru se obține relația de calcul $k=mg/x$. Se trec în tabel rezultatul măsurătorilor și valorile calculate.

Nr. det	m(kg)	x(cm)	k(N/m)	k_m(N/m)	Observații

Reprezentăm grafic forța de întindere a resortului, adică relația liniară dintre greutatea corpului și alungirea resortului.

Ducem o dreaptă printre puncte, ca în graficul 16. Panta graficului reprezintă constanta elatică a resortului.

Dacă se leagă în serie două resorturi, tensiunile elastice din resorturi sunt egale: $F_1 = F_2 = F = mg$, unde $F_1 = k_1x_1$ și $F_2 = k_2x_2$. Un resort echivalent ar avea o constantă k_{e_s} astfel încât: $k_{e_s} = \frac{F}{x}$,



unde $x = x_1 + x_2$ (alungirea totală).

Obținem:

$$\frac{1}{k_{e_s}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}; \; k_{e_s} = \frac{k_1k_2}{k_1 + k_2}.$$

Se determină constantele elastice a două resorturi, k_1 și k_2. Se leagă cele două resorturi în serie și se determină k_{es}. Se calculează valorile medii ale constantelor elastice.

Nr.determinării	k_1	k_2	k_{es}	Surse de erori
1 2 3				
	$k_{1\,mediu} =$	$k_{2\,mediu} =$	$k_{es\,mediu} =$	

5.10. Determinarea coeficientului de frecare la alunecare

1. Scopul lucrării este determinarea coeficientului de frecare la alunecare.

2. Teoria lucrării se bazează pe relația de dependență dintre forța de frecare la alunecare și forța de apăsare normală.

3. Material didactic, procedeu experimental, înregistrarea și prelucrarea datelor

Materiale: plan înclinat cu panta reglabilă, raportor sau riglă, fire inextensibile, mase marcate și/sau dinamometru. Materialele pot fi adaptate cerințelor de mai jos.

a) Se mărește unghiul planului înclinat față de orizontală până când, prin ciocniri ușoare cu degetul, corpul începe să se miște uniform către baza planului înclinat 17.

Un corp solid alunecă uniform pe un plan înclinat de unghi α atunci când $G_t = F_f$, unde $G_t = M \cdot g \cdot \sin\alpha$ și $F_f = \mu Mg \cdot \cos\alpha$.

Obținem coeficientul de frecare la alunecare $\mu = \text{tg}\alpha$.

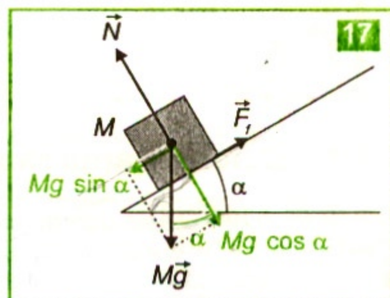
b) Un plan înclinat de unghi α se continuă cu un plan orizontal care are același grad de prelucrare și aceeași natură. Corpul este lăsat liber pe planul înclinat de la înălțimea h și ajunge la baza planului cu o viteză v_B pe care o obținem dintr-un bilanț energic sau cu teorema variației energiei cinetice: 17

$$mgh = \frac{mv_B^2}{2} + \mu mgl \cdot \cos\alpha, \text{ unde } \sin\alpha = \frac{h}{l}.$$

Obținem:

$$v_B^2 = 2g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \cdot l = 2gh(1 - \mu\text{ctg}\alpha).$$

Corpul se oprește într-un punct la distanța d față de baza planului, datorită frecărilor: $0 = v_B^2 - 2\mu gd$.



Obținem: $2gh(1 - \mu \cdot \text{ctg}\alpha) = 2\mu gd$, $\mu = \dfrac{h}{d + h \cdot \text{ctg}\alpha} = \dfrac{l\sin\alpha}{d + l \cdot \cos\alpha}$

Se măsoară l, α, și d și se determină μ.
Se compară valorile coeficientului de frecare obținute prin cele două metode.
Se analizează erorile care apar în determinările făcute. Rezultatele măsurătorilor se trec în tabel:

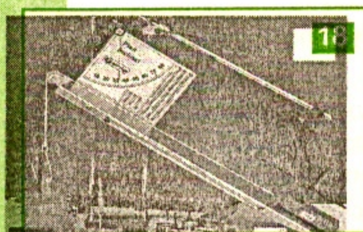
Natura materialelor	$\overline{m}$	μ_{mediu}	Observații asupra erorilor

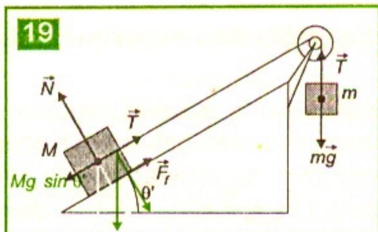
c) Forțele de frecare la alunecare sunt reciproce și au sens opus mișcării relative a unui corp față de suprafața de contact a celuilalt. Sistemul format din cele două corpuri, legate printr-un fir inextensibil, se mișcă uniform, în urma unor ciocniri ușoare în montaj.

Dacă se micșorează unghiul planului înclinat, 18 corpul de masă M de pe plan începe să urce uniform pentru valoarea θ a unghiului planului înclinat la care rezultanta forțelor este nulă: $mg - Mg \cdot \sin\theta - \mu Mg \cdot \cos\theta = 0$. $\Rightarrow \mu = \dfrac{m - M\sin\theta}{M\cos\theta}$.

Dacă se mărește unghiul planului înclinat, corpul de masă M de pe plan începe să coboare uniform pentru valoarea θ' a unghiului planului înclinat la care rezultanta este nulă 19: $Mg \cdot \sin\theta' - \mu Mg \cdot \cos\theta' - mg = 0$. $\Rightarrow \mu = \dfrac{M\sin\theta' - m}{M\cos\theta'}$.

Scripetele fix schimbă doar direcția de mișcare.





Se cântesc corpurile și se determină masele *m* și *M*, se măsoară unghiurile de înclinare θ și, respectiv, θ' ale planului înclinat, în condițiile de mai sus. Calculăm coeficientul de frecare μ cu cele două relații de mai sus, apoi comparăm valorile obținute.Se înregistrează rezultatele obținute într-un tabel:

Nr. det	*m*	*M*	**θ**	**θ '**	μ	μ_{mediu}	Observații asupra erorilor

5.11. Determinarea randamentului unui sistem mecanic

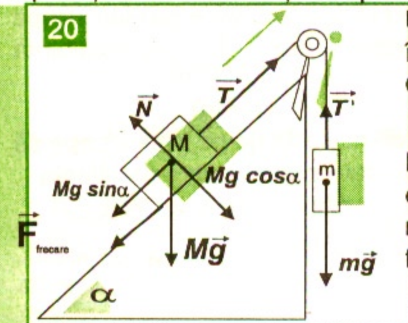
1. Scopul lucrării este determinarea randamentului unui plan înclinat.

2.Teoria lucrării constă în faptul că niciodată nu de poate realiza un transfer de energie mecanică de la un sistem la altul în totalitate, pentru că există pierderi de energie și din această cauză orice transfer de energie se face cu un anumit randament.

3. Material didactic, procedeu experimental, înregistrarea și prelucrarea datelor

Se așează corpul pe planul înclinat și se mărește încet unghiul planului ciocănind planul până când corpul pornește spre baza planului. Se determină astfel unghiul de frecare α_1 și $tg\alpha_1 = \mu$. Se stabilește o altă valoare a unghiului planului înclinat. Se așează pe plan corpul cu masa M și se leagă cu un fir trecut peste un scripete care susține un corp cu masa *m*. Urcarea aproximativ uniformă a corpului, pe planul înclinat cu un anumit unghi α, se obține dacă ciocănești ușor sistemul corp–plan înclinat. 20 Se poate determina randamentul planului înclinat la urcarea uniformă a corpului.

Știi că forța de frecare la alunecare între două corpuri solide nu depinde de aria suprafeței de contact, dar depinde de natura corpurilor și de gradul de prelucrare al suprafețelor în contact și de apăsarea normală pe suprafața de contact $(F_f = \mu N)$.



Un corp cu masa M este urcat uniform pe un plan înclinat de unghi α:

Obținem

$$F - Mg \cdot \sin\alpha - \mu Mg \cdot \cos\alpha = 0$$

Forța de tracțiune care deplasează corpul pe plan este egală în mărime cu greutatea corpului de masă m, atârnat peste scripete și cu tensiunea în firul de legătură: $F = T = mg$.

Deoarece $\sin\alpha = \frac{h}{l}$, randamentul planului înclinat la urcarea uniformă a corpului la înălțimea h sub acțiunea unei forțe de tracțiune:

$$\eta = \frac{Gh}{Fl} = \frac{Gh}{Gl(\sin\alpha + \mu\cdot\cos\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu\cdot\cos\alpha} = \frac{1}{1+\mu\text{ctg}\alpha} < 100\%.$$

Se pot folosi și relațiile:

$$\eta = \frac{MgL\sin\alpha}{mgL} = \frac{M\sin\alpha}{m}$$

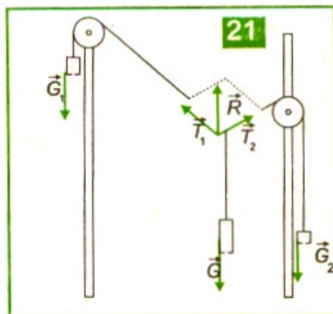
unde L este lungimea planului. În concluzie, randamentul planului înclinat la urcarea uniformă a corpului depinde de înclinarea acestuia.
Care sunt sursele de erori în determinările experimentale în aceste cazuri? Se înregistrează rezultatele obținute într-un tabel:

Nr. det	α	μ	*M/m*	η	Observații asupra erorilor

5.12. Studiul echilibrului de translație

1. Scopul lucrării este punerea în evidență a echilibrului de translație.

2. Teoria lucrării se bazează pe faptul că rezultanta forțelor care acționează asupra unui corp trebuie să fie nulă.



3. Material didactic, procedeu experimental, înregistrarea și prelucrarea datelor

a) Se utilizează dispozitivul din figura 21. Se măsoară în permanență masele corpurilor suspendate de cele două fire m_1, m_2 și masa corpului M care este ținut în echilibru. Cu un raportor se măsoară unghiul α dintre cele două fire. Se calculează tensiunile în cele două fire $T_1 = m_1 g$ și $T_2 = m_2 g$.

Se compun cele două tensiuni utilizând teorema lui Pitagora generalizată:

$$R = \sqrt{T_1^2 + T_2^2 + 2T_1T_2\cos\alpha}.$$

Această forță R trebuie să fie egală cu Mg. Se fac mai multe determinări alegând diferite mase și se trec datele într-un tabel.

Nr. det	m_1(kg)	m_2(kg)	M(kg)	α	R(N)	Mg(N)	Observații

b) De cârligul unui dinamometru se suspendă o riglă în centrul O de simetrie și se citește greutatea ei $G_{riglă}$ 22. Rigla este divizată în părți egale și are orificii la fiecare diviziune. Se atârnă corpuri cu cârlig în diverse orificii astfel încât rigla să fie în echilibru față de punctul de sprijin *O* de pe axa de rotație. Considerăm două corpuri și impunem condiția ca rezultanta forțelor să fie nulă și obținem: $\vec{R}=0$ sau,

$\vec{G}_1+\vec{G}_2+\vec{G}_{rigla}+\vec{F}=0$, adică $\vec{G}_1+\vec{G}_2+\vec{G}_{rigla}=-\vec{F}$.

Se determină masele corpurilor care se atârnă pe riglă. Se citește indicația dinamometrului, adică forța *F*. Această forță *F* trebuie să fie este egală cu greutatea corpurilor atârnate și a riglei. Datele se trec într-un tabel și se fac mai multe determinări experimentale.

Nr.det	m_1(kg)	m_2(kg)	$G_{riglă}$(N)	F(N)	$(m_1+m_2)g+G_{riglă}$(N)	Observații

5.13. Studiul echilibrului de rotație

1. Scopul lucrării este punerea în evidență a echilibrului de rotație.

2. Teoria lucrării se bazează pe faptul că un corp este în echilidru de rotație în raport cu o axă dacă rezultanta momentelor forțelor calculate față de acea axă este nulă.

3. Material didactic, procedeu experimental, înregistrarea și prelucrarea datelor

a) Se utilizează un disc din material plastic și se atârnă în diverse puncte corpuri cu mase cunoscute. Discul se rotește și se va stabiliza într-o poziție de echilibru în care măsurăm brațele forțelor b_1 și b_2. Se efectuează mai multe măsurări și se trec într-un tabel.

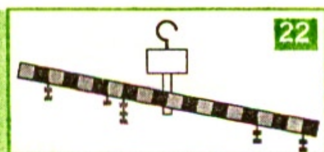
Se verifică relația: $G_1b_1=G_2b_2$, ceea ce înseamnă că $m_1b_1=m_2b_2$.

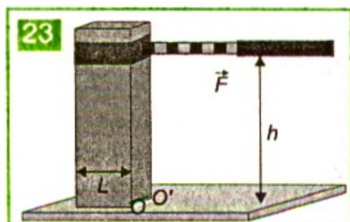
Nr.det	m_1(kg)	m_2(kg)	b_1(m)	b_2(m)	$m_1b_1=m_2b_2$	Observații

b) Se prinde cu hârtie adezivă capătul unui dinamometru, pe un corp paralelipipedic la diferite înălțimi 23. Pentru o anumită înălțime *h*, se constă că prisma se răstoarnă către dinamometru. Considerăm că atunci momentul forței $\vec{F}$ și momentul forței de greutate $\vec{G}$ față de muchia *OO'* sunt egale: $Fh = GL/2$.

Se cântărește corpul paralepipedic, se măsoară lungimea *L* și înălțimea h la care se prinde dinamometrul. Se măsoară forța care determină răsturnarea corpului *F*. Se efectuează mai multe măsurări și se trec într-un tabel. Se verifică relația de mai sus.

Nr. det	G(N)	F(N)	L(m)	h(m)	Fh=GL/2	Observații





Alfavega, material didactic și accesorii pentru fizică, www.alfavega.ro

Ardley, N., Bates, J., Hemsley, W., Lafferty, P., Parker, S., Twist, C., Whyman, K., ***Enciclopedia Științelor***, Teora, 1998

Chirleșan, G., Rusu, O., ***Ghid de evaluare la fizică***, Serviciul Național de evaluare și examinare M.E.N., Trithemius Media, București, 1999

Crețu, T., ***Fizică***, Editura Tehnică, București, 1993

Cursul de fizică Berkeley, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983

Dima, I. și colectiv, ***Dicționar de fizică***, Editura Enciclopedică Română, București, 1972

Durnadeau, J.-P., Bramand, P., Caillet, D., Comte, M.-J., Faye, P., Themassier, G., Eby, D., ***Physical science***, Macmillan Publishing Company New York, Collier Macmillan Publisher, London, 1987

Dumielle, J.-Ch., Mercier, B., ***Physique***, 2e, Editions Belin, Paris, 1987

ELWE . Echipamente didactice . TEILKATALOG 2-11 Germany reprezentanța în România – fax 01-3229346; elwerom@fx.ro

Epstein, L.C., ***Gândiți fizica!***, ALL Educațional, București, 1995

Feynman, R.P., ***Fizica modernă***, Editura Tehnică, București, 1970

Hallyday, D., Resnick, R., ***Fizică***, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1975

Iordache, D., Pop, R., ***Culegere de probleme de fizică***, Editura Radical, Craiova, 1997

Jones, E., Childers, R., ***Physics***, McGraw . Hill Higher Education, Boston, 2000

Lecții interactive de fizică Intuitext™-SOFTWIN, 2003, www.intuitext.ro

Manuale în format electronic, www. teora.ro

Ohanian, H.C., ***Physics***, W-W-Norton & Company, New York-London, Copyright 1985

Oncescu, M.A., ***Fizica nivel postliceal***, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1975

Panaiotu, L., Chelu, I., Petrescu-Prahova, M., Teodoru, E., ***Lucrări experimentale de fizică pentru liceu,*** Editura Didactică și Pedagogică, București, 1972

Popescu, A. și colectiv, ***Probleme de fizică pentru clasele IX-XII***, Editura Petrion, București, 2000

Popovici, M., ***Fizică . fenomene optice***, Editura Teora, 1999

Rusu, O., Galbură, A., Georgescu, C., ***Fizică (Mecanică, Electricitate și optică) pentru liceu, bacalaureat și concursuri de admitere, sistem grilă***, Editura Niculescu, București, 1997

Sears, F.W., Zemansky, M.W., Young, H.D., Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983, trad. după ***University Physics***, Fifth Edition, Addison-Wesley Publishing Company, 1970

Snow, T.P., Shull, J.M., ***Physics***, University of Colorado at Boulder, West Publishing Company, St. Paul, New York, San Francisco, Los Angeles, Copyright 1986 by West Publishing Company

Truția, C., Rusu, O. și colectiv, ***Fizică (Electricitate, Optică, Termodinamică) teste pentru admitere în învățământul superior***, Editura universitară Carol Davila, București, 2003

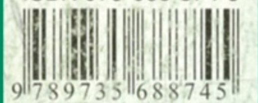
Ursu, S. și colectiv, ***Ghid de lucrări practice de fizică***, Editura Radical, Drobeta Turnu-Severin, 1996

XXX, ***Colecția revistei de fizică Evrika***, 1996–2004

CUPRINS



Citim.
Știm.


ISBN 973-568-874-5
9 789735 688745